



# 4° Premio "Alessandro Rabuzzi"

Gara a squadre di matematica - 11 Febbraio 2019

## Istruzioni Generali

- ✓ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ✓ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ✓ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ✓ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, ove non altrimenti indicato, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- ✓ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{3} = 1,7321$$

$$\sqrt{6} = 2,4495$$

$$\pi = 3,1416$$

## Scadenze importanti

- ✓ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ✓ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ✓ **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

FEDERICO FUBIANI

LE MEMORIE DI ROKSTEG

IL RISVEGLIO DI LEPHISTO



con la collaborazione di

## 1. Il segno di un fato comune

Il villaggio di Roksteg, appartenente alla Federazione della Foresta della Luna, era immerso nella fredda e omonima selva, lontano un paio di settimane di viaggio dalla capitale, Kranestag. Sperduto tra il verde degli innumerevoli alberi del bosco era un tranquillo paesino di qualche decina di famiglie, tutte molto numerose e vivaci. In una notte di metà autunno dell'anno 1357 della seconda era, nacquero contemporaneamente tre bambine: due splendide gemelle, Rako, e Wenra figlie del ranger del villaggio e la rubiconda Peelia, figlia del chierico del tempio di Vhor. Nello stesso istante nacquero in due luoghi distanti Rekle e Kharvus. Il primo un bimbo umano nato nel regno di Zarbol, il secondo un elfo nato nella Repubblica di Freesia. Pochi anni dopo i cinque bambini si sarebbero ritrovati nella piccola e sperduta Roksteg. Qual è la probabilità che 5 bambini su 5 nascano proprio nello stesso identico giorno? [scrivi come risultato le ultime quattro cifre della somma tra il numeratore e il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]



## 2. La sfida delle piramidi

È l'anno 1371. I cinque ragazzi di Roksteg hanno 14 anni. Il villaggio di Roksteg è in fermento, in questi giorni si sta svolgendo la tradizionale sagra d'autunno, attesa con ansia da tutti i paesani. Kharvus, il mago, sfida Rekle, il guerriero, a una gara di abilità: «Vediamo chi tra noi è più abile e svelto a costruire una piramide con quei cubi di legno da 4 *palmi* di spigolo». Rekle risponde scettico: «Ma tu con la magia sei avvantaggiato!». «D'accordo, amico mio! lo avrò il compito di costruirne una più grande... l'unica condizione è che entrambe abbiano la stessa altezza e abbiano un solo cubo come punta. Beh! Facciamo un'altezza di 20 cubi visto che questa è la ventesima edizione della sagra. La differenza tra le due piramidi sarà che, in quella che costruirai tu, ogni piano dovrà differire da quello sottostante per una cornice quadrata di spessore 2 *palmi*, mentre, in quella che costruirò io, ogni piano dovrà differire da quello sottostante di una cornice quadrata di spessore 4 *palmi*. Ti va bene come vantaggio, amico mio?». Rekle, dopo averci pensato un istante, stringe la mano all'amico: «Caro Kharvus, accetto di buon grado la tua sfida e vedrai che mi farò valere!». Quanti cubi in più dovrà posizionare con le sue abilità magiche Kharvus?

## 3. I salti del valoroso Fiyod

Terminata la gara tra i due ragazzi, Rako decide di far esibire il suo lupo Fiyod per la gioia dei ragazzini del villaggio. Ai suoi comandi, Fiyod inizia a saltare ripetutamente senza mostrare cenni di stanchezza. Il lupo compie una sequenza di salti: un salto di 1 *passo* verso ovest, poi un salto di 1 *passo* verso sud, un salto di 2 *passi* verso est, un salto di 2 *passi* verso nord, un salto di 3 *passi* verso ovest e così via. Al preciso comando di Rako, Fiyod si ferma dopo aver percorso una distanza totale di 1369 passi. Se si considera la semiretta che parte dal punto in cui il lupo aveva le zampe appoggiate per effettuare il primo salto e va in direzione nord-est, quante volte il lupo avrà lasciato le sue impronte sopra di essa?

## 4. La destrezza di Wenra

Mentre girano tra i vari banchi della sagra, i ragazzi vedono un bambino in lacrime. «Che succede, Ering?» chiede Wenra al bambino. «Il tizio a quel banco mi ha truffato! Propone un gioco con i dadi, assicurando che è facilissimo vincere. In realtà i dadi sono truccati! Me ne sono accorto perché uno è rimasto incastrato in una fessura del tavolo... e aveva gli spigoli limati ...» «È tutto vero!» conferma un secondo bambino «me ne sono accorto anch'io!» «Naturalmente è stato svelto a riprendersi il dado, nascondendolo alla vista degli adulti presenti ... ma io sono certo di quello che ho visto!» «E quanto ti ha truffato?» Chiede Wenra. «Due



monete d'oro e quattro di rame!» Wenra non perde un secondo: sfruttando la sua abilità di "artista della ruberia" si nasconde tra le ombre, scivolando dietro il lestofante. Con destrezza gli sfilava il borsello delle monete per riconsegnare il maltolto al bambino. Se una moneta d'oro equivale a 3 monete d'argento e una moneta d'argento equivale a cinque di rame, e il borsello di Ering non può contenere più di 22 monete, quante sono le possibili combinazioni di monete che la ragazza può restituire al bambino?

### 5. La raccolta di fondi per il tempio di Vhor

Peelia e suo padre Chubb stanno raccogliendo dei fondi per restaurare il tetto del tempio di Vhor. I paesani accorrono devoti di fronte alla necessità del tempio e alla fine della sagra hanno riempito la cassetta delle offerte. Peelia riceve l'incarico dal padre di contare e ordinare le monete raccolte, tutte di diametro un quarto di *palm*. La giovane chierica con pazienza le conta e le dispone in una piccola cassetta di sicurezza a base quadrata  $4 \times 4$  *palmi*, con un'altezza tale da poter mettere una sopra l'altra ben 10 monete. La giovane riesce a mettere il massimo numero di monete all'interno della scatola disponendole in maniera meticolosa. Quante monete sono state donate per la riparazione del tempio?

### 6. L'incontro con il folletto Poldum

L'anno successivo, i ragazzi compiono un'escursione nelle foreste che circondano Roksteg, in direzione delle cascate di Varg. Qui si imbattono in Poldum, un folletto dispettoso ma simpatico che li sottopone a un indovinello.

«Coraggio, piccoli amici,  
se rispondete vi farò felici!  
Qual è il numero intero,  
che sia positivo, dico davvero,  
che di divisori ne abbia trentasei  
e sia il più piccolo, carissimi miei?»

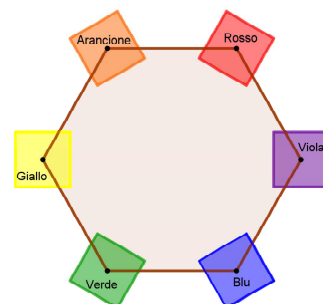
Peelia risponde correttamente; come premio Poldum concede ai ragazzi l'incantesimo di *Levitazione*, con cui potranno volare sopra la zona delle cascate per un'intera clessidra! I ragazzi, col cuore palpitante di gioia, ammirano lo splendido panorama dall'alto.

### 7. In gita a Crownsdale



I cinque ragazzi si recano nella grossa cittadina di Crownsdale dove Kharvus deve consegnare una missiva. Il destinatario è il mago Zagoras che vive in una torre dalla guglia verde. La città si sviluppa in altezza e sono numerose le torri che ne caratterizzano il panorama. Le sei torri della magia dalla guglia colorata (verde, gialla, arancione, rossa, viola e blu) hanno i centri nei 6 vertici di una piazza a forma di esagono regolare di lato 30 *pertiche*.

Sono le sei torri più imponenti e alte della città. Esse hanno dimensioni rappresentate da un numero intero di



*pertiche*, base quadrata di uguale lato di lunghezza maggiore di 5 *pertiche*, una coppia di lati perpendicolari al segmento che unisce il vertice dell'esagono al suo centro, altezze in progressione aritmetica di ragione 2 *pertiche* e un volume complessivo di 194400 *pertiche cubiche*. Quante sono le possibili sestine di torri? [fornire come risposta la somma di tutti i possibili lati di base]

### 8. L'indovinello di Battente

Individuata la torre del mago, i cinque arrivano alla porta e Kharvus ne percuote il battente che, per loro sorpresa, si anima rispondendo: «Ehi, ti pregherei di maneggiare con delicatezza il mio anello. Se lo scuoti con troppa forza, finirai per provocarmi un fastidioso prurito al naso. E se dovessi starnutire, non posso garantire di rispettare le buone maniere, visto che non possiedo mani da mettere davanti alla bocca, come puoi ben vedere...». Lo stupore dei ragazzi viene presto sostituito dalla concentrazione



necessaria a rispondere al quesito posto loro dall'artefatto magico. «Quante sono le coppie di numeri interi  $(m,n)$  tali che  $3n^2 + 12n = 56 + 48m - 8m^2$ . Se non sarete in grado di dare la giusta risposta, la porta rimarrà chiusa.»

### 9. La lunga scalinata della torre

Risolto l'enigma di Battente, dopo aver ascoltato per qualche clessidra le chiacchiere del loquace artefatto, i ragazzi si accingono a salire la scala per raggiungere il mago Zagoras nelle sue stanze. Gli scalini da salire sono davvero tanti: non se ne vede la fine! Rako, non si scoraggia perché è stata molto attenta alle indicazioni di battente che, tra una parola e l'altra, ha detto loro che avrebbero affrontato un numero di scalini pari alla somma dei numeri primi di tre cifre che sono della forma  $\overline{a^na^{n+1}a^{n+2}}$  oppure  $\overline{a^{n+2}a^{n+1}a^n}$ , dove  $1 \leq a \leq 9$  e  $a, n \in \mathbb{N}$  ( $M = \overline{abc}$  significa che  $a, b, c$  sono le cifre di  $M$  scritto in base 10). Arrivata per prima insieme a Fiyod davanti alle stanze del mago, mentre guarda dall'alto gli amici ancora attardati per le scale, sorride loro contenta perché ha avuto la conferma che il suo calcolo precedente era giusto. Quanti scalini ha contato Rako?

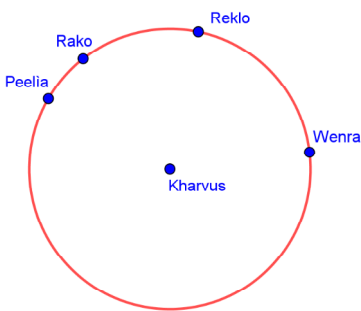


### 10. L'incantesimo di Zagoras

Ricevuta la missiva dalle mani di Kharvus, Zagoras si sdebita mostrando loro uno stupefacente incantesimo della scuola di Illusione. I ragazzi rimangono a bocca aperta contemplando un gioco di luci consistente in 84 sfere luminose di raggio 2 palmi dai colori cangianti che volteggiano nell'aria danzando al ritmo di un'allegria melodia. Finita la musica, le sfere si poggiano magicamente a terra le une sopra le altre formando un tetraedro. Appena Zagoras poggia il palmo della mano sulla sommità della sfera più alta, esse si dissolvono in uno sfavillante luccichio. Sorridendo, Zagoras chiede ai ragazzi: «Sapreste dirmi quanti palmi dista da terra la mia mano, ragazzi miei?». Stavolta è Reκλο a fornire la risposta corretta sapendo bene come si accatastano i sacchi di farina.

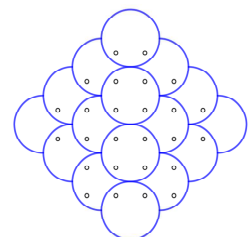
### 11. L'attacco dell'Orsotauo

Durante una scorta al mercante Goldmaer, i ragazzi si trovano a fronteggiare un temibile orsotauo che appare improvvisamente dalla foresta circostante, annunciato da un verso cupo e stridente. Subito i ragazzi si dispongono a cerchio intorno al Kharvus, per dargli il tempo di preparare il suo potente incantesimo. Wenra, Reκλο, Rako e Peelia si posizionano in senso antiorario tutti a distanza di 18 passi da Kharvus, in formazione di difesa su quattro punti distinti di una semicirconferenza e in modo tale che Rako si trovi sul prolungamento della mediana del triangolo formato da Wenra, Kharvus, Reκλο condotta a partire da Wenra, e che Peelia sia sul prolungamento dell'altezza condotta sempre a partire da Wenra. Una volta al loro posto di combattimento, il minaccioso orsotauo si trova precisamente nell'intersezione della retta individuata da Peelia e Rako con la retta individuata da Kharvus e Reκλο il più vicino alla bestia. Qual è la distanza dell'orsotauo dal mago?



### 12. La riparazione dell'armatura di Fiyod

In seguito all'acceso combattimento con l'orsotauo, la corazza di Fiyod necessita di una piccola riparazione. Una delle scaglie dell'armatura si è danneggiata e Rako, per precauzione, decide di sostituirla. Poiché la corazza è stata costruita con il prezioso Vhorenio, il metallo più resistente e leggero che i nani riescono a estrarre dalle viscere della terra, la ragazza si rivolge a Reκλο che conosce i rudimenti dell'arte da fabbro ed è in grado di smontare il pezzo dell'armatura danneggiato. Ogni scaglia ha forma di cerchio con diametro di un quarto di palmo. Qual è la superficie del corpo di Fiyod che il pezzo di armatura da riparare ricopre? [scrivere il valore trovato moltiplicato per 1000]



### 13. L'acquavite di Beorthio

I ragazzi hanno condotto Goldmaer alla miniera di rame dei nani, dove si intratterranno per alcuni giorni alloggiati nella locanda spesi dal mercante. Beorthio, il locandiere, produce una deliziosa acquavite a base di frutti di bosco. La ricetta è segretissima, ma Wenra è intenzionata a scoprirla, per riprodurre la bevanda anche a casa sua. Approfittando di un momento di distrazione del locandiere che sta intrattenendo i suoi amici in chiacchiere conviviali, la ragazza si intrufola in cucina e trova un foglio sul quale c'è scritto qualcosa per lei incomprensibile "La proporzione tra more e lamponi deve essere esattamente uguale a  $\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2}$ , dove  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono le radici del polinomio  $m(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x + 5$ ." [scrivere la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

### 14. La stanza magica di Kharvus

Dopo un furibondo litigio con il padre, Kharvus ha abbandonato la propria casa. Per non passare la notte all'addiaccio, si è creato una stanza magica in cui pernottare nelle vicinanze del salice piangente che bagna la sua chioma nel fiume Zerob. Di solito, con la sua arte arcana, modella un semplice cubo, ma poiché stasera riceverà in visita i quattro compagni, decide di stupirli, variando la forma della sua dimora. Una volta entrati nel rifugio di Kharvus, mediante la scala dimensionale, Wenra, Peelia, Rako e Re klo non riescono a credere ai loro occhi: una stanza luminosissima, calda, accogliente, ottenuta dall'intersezione di un tetraedro di spigolo di lunghezza 6 pertiche e di una sfera che ha centro coincidente con il centro del tetraedro ed è tangente agli spigoli del tetraedro. Qual è il volume della magnifica stanza del mago? [una volta espresso il volume nella forma  $\pi(a\sqrt{b} - c\sqrt{d})$  scrivere come risposta  $a + b + c + d$ ]

### 15. La scomparsa dei delegati di Roksteg

La delegazione del villaggio di Roksteg in visita alla capitale Kranestag è sparita nel nulla. Tra i membri della spedizione figurano anche Gezem, il padre delle gemelle ed Emuver, il padre di Kharvus. La moglie del capo del villaggio, Inel, che ha assunto il ruolo di guida in vece del marito Osech, anch'egli scomparso con gli altri, decide di mettere insieme una squadra di ricerca da affiancare ai cinque prodi ragazzi. Oltre ai volontari del paese si rendono disponibili per le ricerche anche i soldati della guarnigione della vicina Crownsdale. Una volta individuate tre zone di ricerca sulla mappa si decide che ognuno dei tre gruppi identici che formeranno la squadra dovrà avere le seguenti caratteristiche:



- in ogni gruppo ci devono essere almeno due paesani e un soldato;
- non deve essere composto da più di dodici uomini per potersi spostare velocemente;
- deve avere una forza di combattimento pari almeno a 5 soldati, tenendo conto che due uomini del villaggio possono essere considerati equivalenti a un soldato;
- ogni membro deve avere un cavallo;
- ogni coppia di paesani deve avere un cavallo di riserva;
- i cavalli disponibili per l'intera squadra sono un massimo di 42;
- ogni gruppo deve possedere una capacità di ricerca massima tenendo conto che ogni abitante di Roksteg, esperto di queste terre, può essere considerato come tre soldati.

Quanti saranno i paesani e i soldati che comporranno un gruppo con la massima capacità di ricerca? [scrivere come risposta il prodotto tra il numero di paesani e il numero di soldati]

## 16. L'attacco a Kharvus, Peelia e Wenra



Per cercare gli amici scomparsi con maggior efficacia, i ragazzi si dividono in due gruppi di tre. Rako, Re klo e Fiyod si dirigono a est, mentre Kharvus, Peelia e Wenra verso sud. Il secondo terzetto viene attaccato da misteriosi figure che gli lanciano contro una boccetta. Dai frantumi si propaga un misterioso fumo nero. Peelia e Kharvus vengono sorpresi e respirano una tale concentrazione di vapori da cadere a terra completamente privi di sensi. Wenra invece si è defilata avendo percepito il pericolo imminente. Nel punto dove si è nascosta la ragazza, i fumi hanno una concentrazione bassissima. Sapendo che il malefico fumo ha effetto sulle persone se la sua concentrazione è superiore al 25%, che la concentrazione a una distanza di  $x$  *pertiche* dai frantumi della boccetta è data

dalla funzione  $c(x)$ , e che vale la relazione  $\frac{c(x)}{c(y)} - \frac{y}{x+2} = c(x)$  con  $x, y \geq 0$ , a quale distanza minima si deve trovare il nascondiglio della ragazza?

## 17. L'inseguimento disperato di Wenra

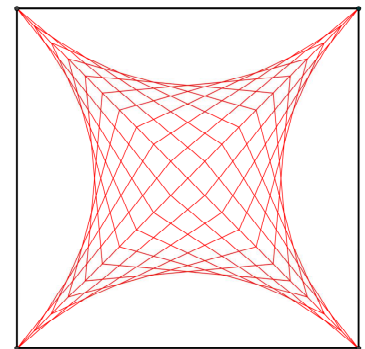
Wenra, l'unica sfuggita all'agguato, non intende perdere di vista i propri amici, catturati dai loschi figure. Per inseguirli senza essere notata, sgattaiola sotto il carro dei lestofanti e vi si attacca con una corda e i suoi pugnali. Appesa al pianale, si dispone con feroce determinazione, attendendo il momento dell'arrivo al covo dei malfattori. Durante il tragitto, la ragazza conta il passare del tempo, tenendo bene in mente la posizione in cui erano stati attaccati. Giunti al covo, la giovane ladra, seppur esausta, riesce a defilarsi senza farsi vedere e si dirige verso Speley, per raggiungere Rako e Re klo. Per ricordare il tempo trascorso durante la marcia, ha memorizzato che il numero di *tacche* necessarie per arrivare a destinazione è uguale alla somma dei numeri dispari consecutivi  $a, b, c$  tali che  $a^2 + b^2 + c^2$  è un numero di quattro cifre tutte uguali. Quante *tacche* è durato l'estenuante viaggio?

## 18. L'esperimento dei cilindri

Kharvus e Peelia sono stati portati, privi di sensi, nei sotterranei del maniero diroccato e imprigionati dentro due cilindri di vetro, immersi in uno strano liquido caldo, denso e trasparente, percorso da centinaia di bolle. Grazie alla sua capacità di concentrazione, Peelia riesce a destarsi dal sonno artificiale indotto dal maleficio cui sono stati sottoposti; Kharvus invece, è ancora addormentato. Dal cilindro, Peelia scorge un losco figure vicino a un macchinario. L'uomo pare controllare l'esperimento agendo su 9 leve numerate da 1 a 9, la cui azione modifica la densità del liquido e il numero delle bolle che escono dal fondo. Il malvagio Sigdragasum, padrone dei sotterranei, muove le leve secondo ben precise sequenze: abbassa e rialza 10 leve in rapida successione. Non ottenendo risultati, impreca senza sosta contro uno dei suoi poveri sgherri, prima di uscire dalla stanza furibondo. Peelia ha capito che lei e il suo amico riusciranno a salvarsi soltanto se nella sequenza composta dal perfido Sigdragasum tutte le leve saranno azionate almeno una volta ed esattamente una leva sarà azionata due volte ma non consecutive. Peelia, ormai ripresasi completamente, ha subito calcolato la probabilità di salvarsi. [indicare le ultime 4 cifre della somma tra il numeratore e il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

## 19. Una strana ragnatela

Anche Fiyod, Rako, Wenra e Re klo sono riusciti ad accedere al sotterraneo dove sono rinchiusi Peelia e Kharvus. Cercando le tracce dei loro amici, Rako trova un passaggio segreto di forma quadrata, nascosto da una strana ragnatela, i cui fili sottili ma estremamente resistenti sono stati tessuti in una forma di stella a quattro punte che lascia affascinata la giovane ranger. I fili portanti, divisi in 200 parti uguali dagli altri fili della tela, seguono le diagonali del quadrato. La trama è costituita da una successione di 100 rombi con le diagonali coincidenti con i fili portanti che si intrecciano l'uno con l'altro, in modo tale che ognuno di essi abbia una diagonale più grande e una più piccola del rombo successivo. Dopo un attento esame, Rako è certa che l'autore di tale meraviglia della natura, il ragno Sikarius Purpureus, abbia abbandonato la sua opera. I quattro stanno attenti a non rimanere impigliati nella



ragnatela possono così proseguire la loro esplorazione. Determina la percentuale dell'apertura del cunicolo che è occupata dalla ragnatela. [scrivere come risultato la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini]

## 20. Tempesta di fiamme

I ragazzi si trovano di fronte gli sgherri di Sigdragasum. Non avendo vie di fuga per salvarsi, di fronte all'inferiorità numerica, Kharvus è costretto a ricorrere al suo incantesimo più potente: la devastante Tempesta di Fiamme. Dopo essersi concentrato ed aver raccolto tutte le sue energie magiche, dalle sue dita si propagano lingue di fuoco che vanno a colpire tutti i nemici, senza dar loro via di scampo. Ciascuno di questi letali raggi è costituito da 15 *aste* infuocate collegate l'una all'altra mediante giunti snodati. La prima e l'ultima *asta* sono allineate tra loro e puntano nella direzione del bersaglio da colpire, mentre le altre possono essere piegate dal mago, con la sua abilità e concentrazione, in modo da formare angoli di  $\pm 45^\circ$  rispetto alla direzione di propagazione del raggio, per superare ostacoli e colpire più nemici. Quante sono le possibili traiettorie delle lingue di fuoco che escono da ciascun dito della mano di Kharvus? [indicare le ultime 4 cifre della soluzione]



...

**Gli sgherri di Sigdragasum sono stati sconfitti. Mentre sono in cerca del temibile e folle padrone del sotterraneo, da una delle caverne si ode un ringhio terribile, capace di farsi strada tra cunicoli e tonnellate di roccia...**

**Peelia, terrorizzata, invoca il dio del Sole: «Che il divino Vhor ci aiuti... quel pazzo ha risvegliato Lephisto!»**

**TO BE CONTINUED .....**



Testo scritto da  
Federico Fubiani  
Paolo Vannucchi

Con la preziosa collaborazione di  
Gianpaolo Prina, Sandro Campigotto e Silvia Torrigiani