LICEO SCIENTIFICO "AMEDEO DI SAVOIA" PISTOIA

4° Premio "Alessandro Rabuzzi"

Gara a squadre di matematica - 11 Febbraio 2019

LE MEMORIE DI ROKSTEG
IL RISVEGLIO DI LEPHISTO

SOLUZIONI

1. Il segno di un fato comune	**0626**
2. La sfida delle piramidi	**7790**
3. I salti del valoroso Fiyod	**0019**
4. La destrezza di Wenra	**0009**
5. La raccolta di fondi per il tempio di Vhor	**2800**
6. L'incontro con il folletto Poldum	**1260**
7. In gita a Crownsdale	**0090**
8. L'indovinello di Battente	**0008**
9. La lunga scalinata della torre	**0560**
10. L'incantesimo di Zagoras	**0023**
11. L'attacco dell'Orsotauro	**0036**
12. La riparazione di Fiyod	**0571**
13. L'acquavite di Beorthio	**0088**
14. La stanza magica di Kharvus	**0025**
15. La scomparsa dei delegati di Roksteg	**0016**
16. L'attacco a Kharvus, Peelìa e Wenra	**0006**
17. L'inseguimento disperato di Wenra	**0129**
18. L'esperimento dei cilindri	**0889**
19. Una strana ragnatela	**0067**
20. Tempesta di fiamme	**2941**

SOLUZIONI

1. Il segno di un fato comune

In maniera banale i casi possibili sono le disposizioni con ripetizione dei 365 giorni dell'anno in 5 posizioni e i casi favorevoli risultano le 365 cinquine con numeri tutti uguali, quindi la probabilità cercata è $p = \frac{1}{365^4}$.

Dobbiamo ora calcolare le ultime quattro cifre della somma tra numeratore e denominatore di questa frazione.

Soluzione (1)

Calcoliamo in maniera brutale $365^2 = 365 \cdot 365 = 133225$, poi $365^4 = 365^2 \cdot 365^2 = 133225 \cdot 133225 = \ldots 0625$.

Ricordandosi del numeratore della frazione le ultime quattro cifre cercate sono 0626. La risposta è **0626**.

Soluzione (2)

Calcoliamo la quarta potenza di 365 utilizzando lo sviluppo del binomio di Newton:

$$365^4 = (360+5)^4 = 360^4 + 4 \cdot 360^3 \cdot 5 + 6 \cdot 360^2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 360 \cdot 5^3 + 5^4 .$$

I primi quattro addendi hanno le ultime 4 cifre nulle perché si osserva immediatamente che contengono un fattore 10^4. L'ultimo addendo è $5^4 = 625$. Ricordandosi del numeratore della frazione le ultime quattro cifre cercate sono 0626. La risposta è **0626**.

2. La sfida delle piramidi

Nella prima piramide il piano che sta sotto al cubo che costituisce la punta è costituito da 4 cubi. I piani sottostanti che seguono saranno quindi costituiti da 9 cubi, 16 cubi e così via fino alla base costituita da n^2 cubi, dove n è l'altezza in cubi della piramide. Allora il numero di cubi necessario per costruirla sarà dato da:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Nella seconda piramide il piano che sta sotto al cubo che costituisce la punta è costituito da 9 cubi. I piani sottostanti che seguono saranno quindi costituiti da 25 cubi, 49 cubi e così via fino alla base costituita da $(2n+1)^2$ cubi. Allora il suo volume espresso in cubi sarà dato da:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(4k^2-4k+1\right) = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{1}^{n}1 =$$

$$= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n .$$

Se calcoliamo la differenza tra il volume della seconda piramide e quello della prima si ottiene:

$$\Delta V = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2n(n+1) + n =$$

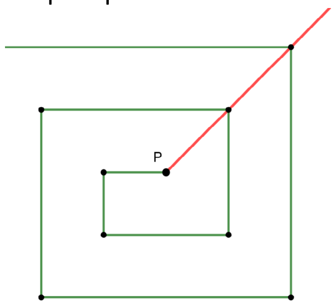
$$= n\frac{(n+1)(2n+1) - 4(n+1) + 2}{2} = n\frac{(n+1)(2n-3)+2}{2} =$$

$$= n\frac{2n^2 - n - 3 + 2}{2} = n\frac{2n^2 - n - 1}{2} = \frac{n(2n+1)(n-1)}{2} .$$

La differenza di volume in cubi tra le due piramidi è nel caso generale $\Delta V = \frac{n(2n+1)(n-1)}{2}$. Sostituendo adesso $n=20$ si ottiene $\Delta V = \frac{20(40+1)(20-1)}{2} = \frac{20 \cdot 41 \cdot 19}{2} = 7790$ cubi. La risposta è quindi **7790**.

3. I salti del valoroso Fiyod

La distanza totale percorsa da Fiyod saltando è pari a 1369 *passi*. Ora visto che i salti sono sempre "accoppiati" (due della stessa lunghezza consecutivi), il numero di salti fatti è dispari perché la distanza percorsa è data da un numero dispari di passi. Quindi Fiyod deve aver finito la sua esibizione con un salto verso est oppure verso ovest. Se n è il numero di salti accoppiati allora la distanza sarà data da:



$$d = 2\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^2 .$$

Visto che si ha $1369 = 37^2$, allora $n = 36$ e quindi i salti sono stati 73 in totale. Ogni 4 salti si viene a trovare sulla semiretta con direzione nord-est che ha origine nel punto P da cui è partita. Ora 73/4 fa 18 con resto 1. Allora il numero di volte che Fiyod si trova con le sue zampe sulla semiretta nord-est è pari a 18 più 1, poiché il punto di partenza è l'origine di tale semiretta. La risposta è dunque **19**.

4. La destrezza di Wenra

Wenra deve restituire a Ering una quantità di denaro equivalente a 2 monete d'oro e 4 monete di rame. Considerata la capienza del borsello del bambino, il maltolto può essere restituito nelle seguenti forme:

ORO	ARGENTO	RAME	TOTALE
2		4	6
1	3	4	8
1	2	9	12
1	1	14	16
1		19	20
	6	4	10
	5	9	14
	4	14	18
	3	19	22

La risposta è dunque **9**.

5. La raccolta di fondi per il tempio di Vhor

Quattro monete messe in fila occupano una lunghezza pari a un palmo. Iniziamo a disporre le monete in fila sul fondo della scatola prima di impilarne 10 una sopra l'altra. Se mettessimo tutte le monete nella scatola

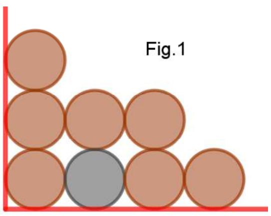


Fig.1

secondo righe e colonne (figura 1) potremmo disporne 16x16x10, cioè 2560 monete. In realtà ne possiamo mettere di più disponendole in maniera sfalsata. Disponendo 16 monete appoggiate al lato di lunghezza 4 palmi, possiamo disporre una seconda fila di 15 monete sfalsate e tangenti alle precedenti (figura 2) e così via in maniera alternata. I centri di tre monete tangenti tra loro in questo schema si trovano nei vertici di un triangolo equilatero di lato $2R$ la cui altezza è quindi $\sqrt{3}R$. L'altezza di tale triangolo rappresenta la distanza tra le rette che contengono i centri delle monete di due file adiacenti. Questa seconda disposizione, se è fatta di n righe, raggiungerà un'altezza di $h_2 = \sqrt{3}R(n-1) + 2R$, mentre la prima disposizione a parità di righe avrà altezza $h_1 = 2Rn$. La seconda disposizione è migliore se permette nella stessa altezza di inserire più righe orizzontali di monete rispetto alla prima disposizione. Ora 16 file nella prima disposizione corrispondono a una lunghezza di $32R$, per vedere quante file orizzontali possiamo fare con la seconda disposizione, utilizzando al meglio la lunghezza disponibile, basta risolvere la seguente disequazione:

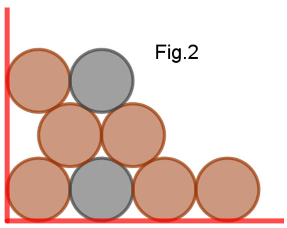


Fig.2

$$\sqrt{3}R(n-1) + 2R < 32R \;\rightarrow\; \sqrt{3}(n-1) < 30 \;\rightarrow\; n < \frac{30}{\sqrt{3}} + 1 \;\rightarrow\; n < \frac{30}{1,7321} + 1 \simeq 18,32 .$$

Allora con la seconda disposizione possiamo inserire 18 file orizzontali contro 16, ben 2 in più, in particolare 9 righe da 16 monete e 9 da 15 monete. In totale abbiamo 9x15x10 più 9x16x10, cioè 2790 monete. Ma si può fare di meglio! Con 18 righe sfalsate si occupa una lunghezza $\sqrt{3}(18-1)+2=1,7321\cdot 17+2\simeq 31,45$ volte il raggio R, contro le 32 a disposizione. Per aumentare il numero di monete e raggiungere il massimo cercato possiamo sostituire alcune righe da 15 con righe da 16 passando da una disposizione esclusivamente di tipo 2 a una disposizione mista tipo 2 e tipo 1. In complesso abbiamo a disposizione un margine per la sostituzione delle righe pari a $32-31,45=0,55$ volte il raggio. Se sostituiamo la riga da 15 monete nella posizione più alta della disposizione (quella cioè che ha una riga da 16 solo sotto) aumentiamo l'altezza totale $2-\sqrt{3}\simeq 0,2679$ volte il raggio. Tutte le altre righe da 15 che potremmo sostituire sono però incastrate tra due righe da 16. L'eventuale sostituzione di una di queste comporta però un aumento dell'altezza totale di $4-2\sqrt{3}=2\left(2-\sqrt{3}\right)\simeq 0,5358$. Ne segue, visto lo spazio rimanente $0,55$ volte il raggio, possiamo sostituire una sola riga da 15 con una da 16. In definitiva il massimo numero di monete si ottiene con 10 righe da 16 monete e 8 righe da 15 monete che ci danno 10x16x10 più 8x15x10 monete, cioè 2800. La risposta è dunque **2800**.

6. L'incontro con il folletto Poldum

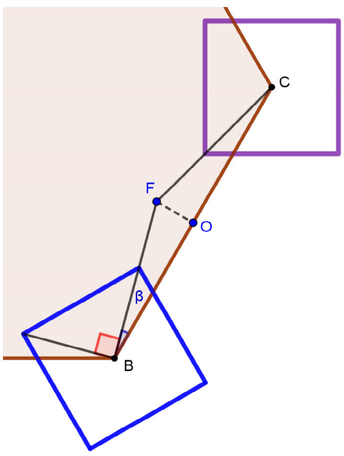
Consideriamo un numero naturale n, esso si può scrivere in maniera univoca come prodotto di numeri primi $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ \dots\ \cdot p_k^{\alpha_k}$ e il numero dei suoi divisori è $d=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ \dots\ (\alpha_k+1)$. Scriviamo 36 in tutti i modi possibili: 36, 2·18, 3·12, 4·9, 6·6, 2·2·9, 2·3·6, 3·3·4, 2·2·3·3. Vediamo quali sono le possibili scomposizioni di n:

- $n=p_1^{35}$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=2^{35}$;
- $n=p_1\cdot p_2^{17}$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=3\cdot 2^{17}=393216$;
- $n=p_1^2\cdot p_2^{11}$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=3^2\cdot 2^{11}=18432$;
- $n=p_1^3\cdot p_2^8$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=3^3\cdot 2^8=6912$;
- $n=p_1^5\cdot p_2^5$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=3^5\cdot 2^5=7776$;
- $n=p_1\cdot p_2\cdot p_3^8$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=5\cdot 3\cdot 2^8=3840$;
- $n=p_1\cdot p_2^2\cdot p_3^5$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=5\cdot 3^2\cdot 2^5=1440$;
- $n=p_1^2\cdot p_2^2\cdot p_3^3$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=5^2\cdot 3^2\cdot 2^3=1800$;
- $n=p_1\cdot p_2\cdot p_3^2\cdot p_4^2$, allora il più piccolo numero di questo tipo è $n=7\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2^2=1260$.

La risposta è quindi **1260**.

7. In gita a Crownsdale

Consideriamo le torri con centri nei vertici B e C dell'esagono di lato $L=30$ *pertiche*. Le diagonali dei



quadrati di base formano un angolo $\beta=15°$, essendo una coppia di lati perpendicolare al segmento che unisce il vertice al centro dell'esagono. Affinché gli spigoli delle torri non si tocchino si deve avere che $\overline{BF}\cdot\cos\beta<\overline{BO}$. Se indichiamo con d la lunghezza della diagonale del quadrato si può scrivere:

$$\frac{d}{2}\cos 15°<\frac{L}{2}\ \rightarrow\ d<\frac{L}{\cos 15°}.$$

Utilizzando la formula di bisezione si ricava:

$$\cos 15°=\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Utilizzando la formula dei radicali quadratici doppi si ha:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

Sostituendo i due risultati delle formule nella disequazione si ottiene:

$$d<\frac{L}{\cos 15°}=\frac{2\sqrt{2}L}{\sqrt{3}+1}.$$

Se indichiamo con x il lato del quadrato, si ha $x=\frac{d}{\sqrt{2}}$ e quindi $x<\frac{2L}{\sqrt{3}+1}$. Essendo $L=30$ si ha la seguente limitazione per il lato del quadrato $x<\frac{60}{2,7321}\simeq 21,96$. Quindi il più grande valore intero del lato è 21. Consideriamo ora il volume complessivo delle torri. Se scomponiamo in fattori primi il suo valore si ha $194400=1944\cdot 100=8\cdot 243\cdot 10^2=2^5\cdot 3^5\cdot 5^2$. Se indichiamo con h l'altezza della torre più piccola il volume complessivo delle 5 torri sarà $V=A_b(h+h+2+h+4+h+6+h+8+h+10)=6A_b(h+5)$. Da ciò si ottiene $A_b(h+5)=2^4\cdot 3^4\cdot 5^2$, dove A_b è il quadrato di un numero intero $x>5$. Cerchiamo ora di determinare tutti i valori possibili di x e $h+5$.

x	$h+5$
6	$2^2\cdot 3^2\cdot 5^2$
9	$2^4\cdot 5^2$
10	$2^2\cdot 3^4$
12	$3^2\cdot 5^2$
15	$2^4\cdot 3^2$
18	$2^2\cdot 5^2$
20	3^4
30	Non accettabile

L'ultimo valore accettabile è $x=20$. Non ci resta che calcolare la somma dei 7 possibili valori di x, cioè $6+9+10+12+15+18+20=90$. La risposta è **90**.

8. L'indovinello di Battente

Manipolando in maniera opportuna la relazione che le coppie di interi (n,m) devono verificare si ottiene:

$$3n^2+12n+8m^2-48m=56 \quad\to\quad 3(n^2+4n)+8(m^2-6m)=56$$

$$3(n^2+4n+4)+8(m^2-6m+9)=56+12+72 \quad\to\quad 3(n+2)^2+8(m-3)^2=140.$$

Se indichiamo con $\alpha=(n+2)^2$ e con $\beta=(m-3)^2$, l'ultima relazione diventa l'equazione diofantea lineare $3\alpha+8\beta=140$. Dato che $MCD(3,8)=1$ e $1|140$, l'equazione ammette soluzioni del tipo $\alpha=\bar{\alpha}+8t$ e $\beta=\bar{\beta}-3t$, dove $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sono soluzioni particolari dell'equazione e $t\in\mathbb{Z}$. Ora α e β per come li abbiamo definiti devono essere dei quadrati di numeri interi, quindi lo devono essere anche $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$. Procedendo alla ricerca di due soluzioni particolari si trova che $\bar{\alpha}=1$ non porta a soluzioni, mentre $\bar{\alpha}=4$ porta a $\bar{\beta}=16$. Allora $\alpha=4+8t$ e $\beta=16-3t$, e poiché α e β devono essere quadrati perfetti, risulta che $0\le t\le 5$. Per $t=0$ si ha $\alpha=4$ e $\beta=16$, per $t=1$, $t=2$, $t=3$ i due valori non sono quadrati perfetti, per $t=4$ si ha $\alpha=36$ e $\beta=4$, per $t=5$ i due valori non sono quadrati perfetti. Ora $\alpha=4$ e $\beta=16$ danno come soluzioni le coppie $(0,7)$, $(0,-1)$, $(-4,7)$, $(-4,-1)$, e così $\alpha=36$ e $\beta=4$ danno come soluzioni le coppie $(4,1)$, $(4,5)$, $(-8,1)$, $(-8,5)$. La risposta è quindi **8**.

9. La lunga scalinata della torre

Iniziamo considerando valori di a crescenti. Se $a=1$ l'unico numero possibile è 111, ma non è un numero primo. Se $a=2$ abbiamo 124, 421, 248, 842, ma l'unico numero primo è 421. Se $a=3$ abbiamo 139 e 931, ma solo 139 è primo. Se $a\ge 4$, allora a^{n+2} è un numero di due cifre per ogni $n\in\mathbb{N}$ e quindi non si può accettare. Gli unici numeri di tre cifre che verificano tale proprietà sono solo 421 e 139. La risposta è dunque **560**.

10. L'incantesimo di Zagoras

La piramide è costituita n strati di sfere ognuno dei quali è costituito da un numero di sfere uguale a un numero triangolare $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ per $k = 1, 2, \ldots, n$ e quindi il numero N delle sfere sarà dato dalla somma dei primi n numeri triangolari cioè $N = \sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Ora si deve avere $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 84$, dalla quale si ottiene $n = 7$. Le 4 sfere che costituiscono la punta e il secondo strato della piramide sono l'una tangente alle altre e i loro centri costituiscono i vertici di un tetraedro di spigolo $2R$. L'altezza di una faccia del tetraedro è $\sqrt{3}R$. L'altezza del tetraedro cade nel centro della faccia opposta al vertice. Il centro di una faccia divide l'altezza della faccia stessa in due parti una doppia dell'altra. L'altezza del tetraedro si può quindi ricavare usando il teorema di Pitagora: l'altezza di una faccia del tetraedro è $h_f = \sqrt{3}R$ e la distanza del centro della faccia dal punto medio di un lato è $d = \frac{\sqrt{3}}{3}R$ e quindi si ha:

$$h_T = \sqrt{\left(\sqrt{3}R\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}R}{3}\right)^2} = \sqrt{3R^2 - \frac{1}{3}R^2} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}} .$$

Per ottenere l'altezza della piramide formata dalle 84 sfere disposte su quattro strati si deve sommare sei volte l'altezza del tetraedro h_T a due volte il raggio delle sfere R. Allora si ha:

$$h_p = 2R + 12R\sqrt{\frac{2}{3}} = 2R\left(1 + 2\sqrt{6}\right) .$$

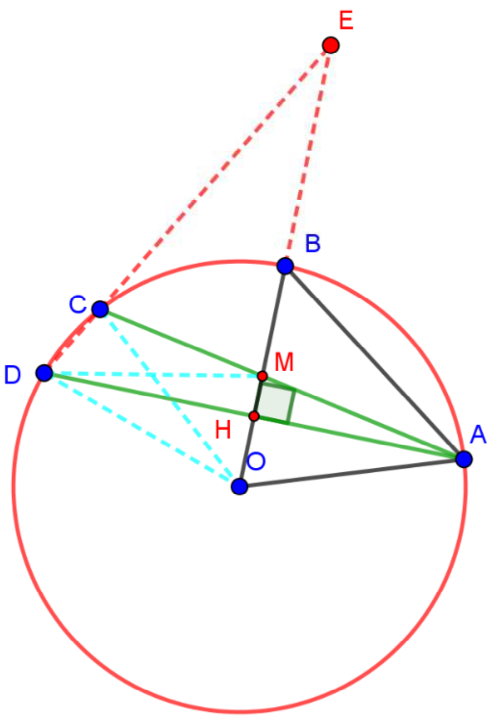
Sostituendo i valori si ottiene:

$$h_P = 4(1+2\cdot 2,4495) = 4(5,899) = 23,596 .$$

La risposta è dunque **23**.

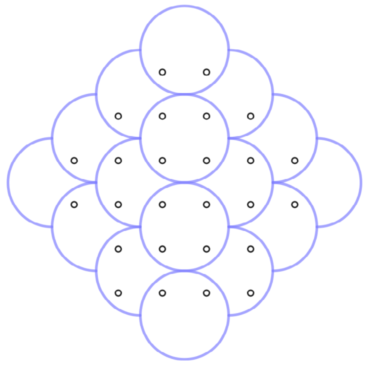
11. L'attacco dell'Orsotauro

Indichiamo con O la posizione di Kharvus, con A la posizione di Wenra, con B la posizione di Reklo, con C la posizione di Rako, con D la posizione di Peelìa e infine con E la posizione del mostruoso orsotauro. Sia M il punto medio di OB e H il piede dell'altezza del triangolo OAB condotta da A. Ora OB è perpendicolare a DA e $\overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OA} = r$ e quindi OB è asse di DA e $\overline{AH} = \overline{HD}$. Ne segue che i triangoli rettangoli AHO e DHO sono congruenti, e lo sono anche i triangoli rettangoli AHM e DHM. Quindi si ha $O\hat{D}M = O\hat{A}M$ poiché somma di angoli congruenti. Il triangolo AOC è isoscele sulle base AC e quindi $O\hat{C}M = O\hat{A}M = O\hat{D}M$. I punti C e D stanno dalla stessa parte rispetto al segmento MO e vedono il segmento MO stesso sotto uno stesso angolo, perciò il quadrilatero $OMCD$ risulta ciclico. Pertanto gli angoli opposti sono supplementari, in particolare $O\hat{D}C + O\hat{M}C = 180°$. Dopo questa osservazione consideriamo i triangoli OED e OAM. Essi risultano simili in quanto $E\hat{O}D = A\hat{O}M$ (angoli corrispondenti di due triangoli rettangoli congruenti) e $O\hat{D}E = O\hat{M}A$ (angoli supplementari di $O\hat{M}C$). Dalla similitudine segue che $\overline{OE} : \overline{OA} = \overline{OD} : \overline{OM}$, cioè $\overline{OE} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{r \cdot r}{\frac{r}{2}} = 2r$. La

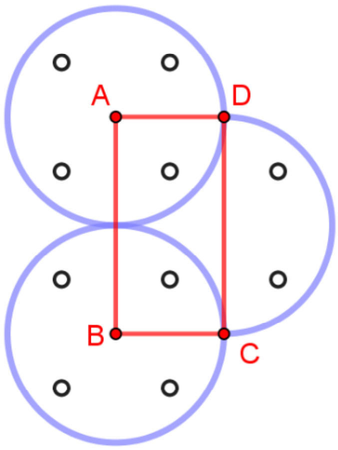


risposta è dunque **36**.

12. La riparazione di Fiyod



Se R è il raggio di ognuna delle scaglie, la superficie del corpo ricoperta da ogni scaglia è $S=\pi R^2$. Ora solo 4 della scaglie che compongono il pezzo di armatura da riparare si vedono totalmente dall'esterno, mentre le altre si sovrappongono coprendosi l'una l'altra parzialmente. La parte di scaglia visibile ha superficie pari all'area di un semicerchio di raggio R sommata all'area del rettangolo ABCD privato di due quarti di cerchio di raggio R: tale superficie è quindi pari all'area del rettangolo ABCD. $A_R = 2R\cdot R = 2R^2$. L'area totale sarà allora data da:



$$A = 4S + 12A_R \quad \to \quad A = 4\pi R^2 + 12R^2 = 4R^2(\pi+6) = D^2(\pi+6)\ ,$$

dove D è il diametro della scaglia. Sostituendo il valore $D=\frac{1}{4}$ allora si ottiene:

$$A=\frac{1}{16}(3{,}1416+6)=\frac{9{,}1416}{16}\simeq 0{,}571312\ .$$

La risposta è dunque **571**.

13. L'acquavite di Beorthio

Per un polinomio di terzo grado si ha che $S=\alpha+\beta+\gamma=-\frac{a_2}{a_3}=-\frac{2}{3}$, $Q=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{a_1}{a_3}=-2$, $P=\alpha\beta\gamma=-\frac{a_0}{a_3}=-\frac{5}{3}$. L'espressione che vogliamo calcolare si può riscrivere nella forma:

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}=\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)=P\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right).$$

Quindi ora ci dobbiamo occupare di calcolare solamente $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}$.

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}=\frac{(\beta\gamma)^3+(\alpha\gamma)^3+(\alpha\beta)^3}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}=\frac{(\beta\gamma)^3+(\alpha\gamma)^3+(\alpha\beta)^3}{P^3}$$

Se indichiamo con $A=\beta\gamma$, $B=\alpha\gamma$, $C=\alpha\beta$ il numeratore della precedete frazione si può riscrivere sfruttando il risultato precedente; $A^3+B^3+C^3$. Tale quantità si può ottenere da:

$$\begin{aligned}(A+B+C)^3 &= (A+B+C)^2(A+B+C)=\left(A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC\right)(A+B+C)=\\ &= A^3+B^3+C^3+6ABC+3\left(A^2B+A^2C+AB^2+B^2C+AC^2+BC^2\right)=\\ &= A^3+B^3+C^3+6ABC+3\left[(AB+AC+BC)(A+B+C)-3ABC\right].\end{aligned}$$

Da tale uguaglianza segue che:

$$A^3+B^3+C^3=(A+B+C)^3+3ABC-3(AB+AC+BC)(A+B+C)=\tilde{S}^3+3\tilde{P}-3\tilde{Q}\tilde{S},$$

dove $\tilde{S}=A+B+C$, $\tilde{Q}=AB+AC+BC$ e $\tilde{P}=ABC$.

Ricordando che $A=\beta\gamma$, $B=\alpha\gamma$, $C=\alpha\beta$ e che $S=\alpha+\beta+\gamma$, $Q=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$, $P=\alpha\beta\gamma$ si ha:

$$A^3+B^3+C^3=(A+B+C)^3+3ABC-3(AB+AC+BC)(A+B+C)=Q^3+3P^2-3SQP,$$

e quindi

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}=\frac{Q^3+3P^2-3SQP}{P^3}.$$

Allora la quantità iniziale che dovevamo determinare è:

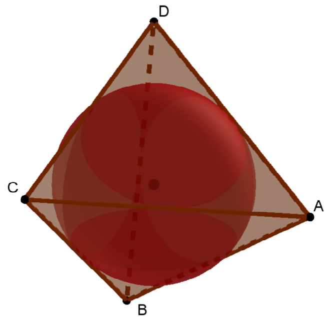
$$\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}=P\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)=\frac{Q^3+3P^2-3SQP}{P^2}.$$

Sostituendo i valori si ottiene:

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}=\frac{(-2)^3+3\left(-\frac{5}{3}\right)^2-3\left(-\frac{2}{3}\right)(-2)\left(-\frac{5}{3}\right)}{\left(-\frac{5}{3}\right)^2}=\left[-8+\frac{25}{3}+\frac{20}{3}\right]\frac{9}{25}=\frac{63}{25}.$$

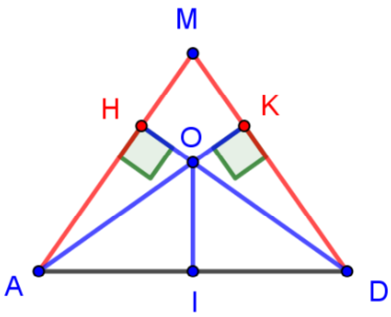
La risposta è quindi **88**.

14. La stanza magica di Kharvus



Se s è lo spigolo del tetraedro $ABCD$, la sua altezza h_T si può ricavare utilizzando il teorema di Pitagora note l'altezza di una faccia $h_f=\frac{\sqrt{3}}{2}s$ e la distanza del centro di una faccia dal punto medio di un lato $d=\frac{\sqrt{3}}{6}s$.

$$h_T=\sqrt{h_f^2-d^2}=\sqrt{\frac{3}{4}s^2-\frac{1}{12}s^2}=s\sqrt{\frac{2}{3}}$$



Consideriamo il triangolo DAM ottenuto sezionando il tetraedro con un piano passante per lo spigolo AD e per il punto medio M dello spigolo opposto. Il punto O intersezione delle altezze DH e AK è il centro del tetraedro. Per similitudine tra triangoli rettangoli si ha:

$\overline{DH}:\overline{DA}=\overline{DI}:\overline{DO}$, per cui $\overline{DO}=\frac{\overline{DA}\cdot\overline{DI}}{\overline{DH}}=\frac{s^2}{2}:s\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}s$;

$\overline{OI}:\overline{DI}=\overline{AH}:\overline{HD}$, per cui $\overline{OI}=\frac{\overline{AH}\cdot\overline{DI}}{\overline{HD}}=\frac{\sqrt{3}}{6}s^2:s\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}s$.

Allora OI è la distanza del centro della sfera da uno spigolo del tetraedro ed è quindi il raggio r della sfera cercata (notare $\overline{OI}=\overline{OM}$). Il volume della sfera sarà $V_S=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{16\sqrt{2}}s^3=\frac{1}{12\sqrt{2}}\pi s^3$. L'intersezione dei due solidi è costituita dalla sfera stessa privata delle quattro calotte sferiche che su essa determinano le quattro facce del tetraedro. Ora il volume di una calotta sferica è dato dalla seguente relazione $V_C=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$, dove h è l'altezza della calotta sferica e r il raggio della sfera. Ora $h=\overline{OI}-\overline{OH}$ e $\overline{OH}=\overline{DH}-\overline{DO}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}s=\frac{1}{2\sqrt{6}}s=\frac{\sqrt{6}}{12}s$ è la distanza del centro da una faccia del tetraedro. Quindi $h=\frac{1}{2\sqrt{2}}s-\frac{\sqrt{6}}{12}s=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{12}s$. Il volume delle quattro calotte sferiche è:

$$V_{4C}=4\pi\left(\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{12}s\right)^2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}s-\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{36}s\right)=4\pi\frac{6\left(4-2\sqrt{3}\right)}{144}s^2\cdot\frac{9\sqrt{2}-\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{36}s=$$

$$=\pi\frac{\left(4-2\sqrt{3}\right)}{6}\cdot\frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{36}s^3=\pi\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{108}s^3=$$

$$=\pi\frac{12\sqrt{2}+2\sqrt{6}-6\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{108}s^3=\pi\frac{9\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{108}s^3=\sqrt{2}\,\pi\frac{9-4\sqrt{3}}{108}s^3\ .$$

Infine il volume dell'intersezione dei due solidi è:

$$V=V_S-V_{4C}=\frac{1}{12\sqrt{2}}\pi s^3-\sqrt{2}\,\pi\frac{9-4\sqrt{3}}{108}s^3=\frac{9-2\left(9-4\sqrt{3}\right)}{108\sqrt{2}}\pi s^3=\frac{8\sqrt{3}-9}{108\sqrt{2}}\pi s^3.$$

Sostituendo $s=6$ si ottiene:

$$V=\frac{8\sqrt{3}-9}{108\sqrt{2}}\pi\cdot 6^3=\frac{8\sqrt{3}-9}{108\sqrt{2}}\cdot\pi\cdot 216=\pi\cdot\left(8\sqrt{3}-9\right)\sqrt{2}=\pi\cdot\left(8\sqrt{6}-9\sqrt{2}\right).$$

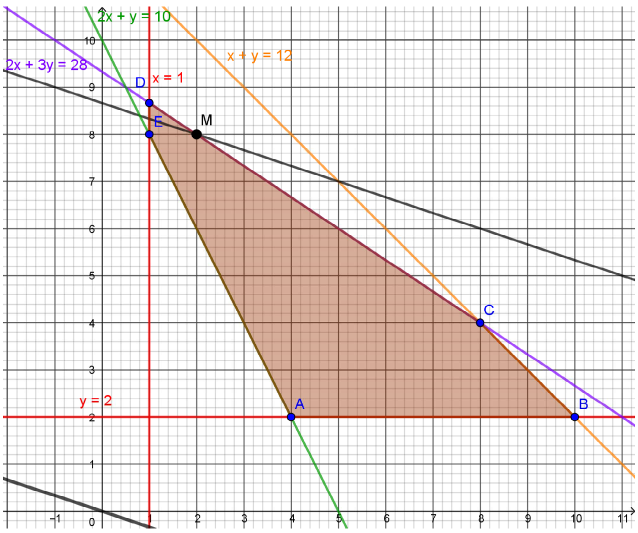
La risposta è dunque **25**.

15. La scomparsa dei delegati di Roksteg

Indichiamo con y il numero di paesani che fanno parte di un gruppo di ricerca e con x il numero dei soldati che fanno parte dello stesso gruppo. Le informazioni a nostra disposizione sulla composizione di un gruppo sono:

- non deve essere composto da più di dodici uomini, cioè $x+y\le 12$, con $x\ge 1$ e $y\ge 2$;
- deve avere una forza di combattimento pari almeno a 5 soldati, cioè $2x+y\ge 10$;
- ogni membro dovrà avere un cavallo, ogni coppia di paesani dovrà avere una cavallo di riserva, i cavalli disponibili per la spedizione sono un massimo di 42, cioè $2x+3y\le 28$;

Andiamo a rappresentare su un piano cartesiano tutte le disequazioni di cui dobbiamo tener di conto: l'intersezione dei cinque semipiani determina il pentagono convesso ABCDE. La quantità che dobbiamo massimizzare è la capacità di ricerca, essa dipende dal numero di paesani e di soldati che compongono il gruppo, e si può esprimere mediante la funzione:



$$C(x,y)=x+3y\ .$$

Poiché è evidente che $C(x,y)$ aumenta sia al crescere di x sia al crescere di y, dobbiamo determinare la retta del fascio di equazione

$$y=-\frac{1}{3}x+k$$

che passi per un punto a coordinate intere del pentagono e abbia termine noto massimo. Il punto a coordinate intere appartenente al pentagono che rende massimo il termine noto è $M(2,8)$ e la retta ha equazione $x+3y=26$, ciò significa che il gruppo ha la capacità di ricerca di 26 persone nonostante sia formato da 8 paesani e da 2 soldati. La risposta è dunque **16**.

16. L'attacco a Kharvus, Peelìa e Wenra

Consideriamo la relazione $\frac{c(x)}{c(y)}-\frac{y}{x+2}=c(x)$.

Soluzione (1) Proviamo a sostituire in essa il valore $y=0$. Si ottiene $\frac{c(x)}{c(0)}=c(x)\ \rightarrow\ c(0)=1$.

Se ora invece sostituiamo $x=0$, si ottiene $\frac{c(0)}{c(y)}-\frac{y}{2}=c(0)\ \rightarrow\ \frac{1}{c(y)}=1+\frac{y}{2}$.

Da ciò segue subito $c(x)=\frac{2}{x+2}$. Ora dobbiamo determinare il valore di x tale che $c(x)=\frac{1}{4}$. Allora la distanza minima del nascondiglio di Wenra risulta pari a 6 pertiche. La risposta è quindi **6**.

Soluzione (2) Proviamo a sostituire in essa il valore $y=x$. Si ottiene $1-\frac{x}{x+2}=c(x)$.

Da ciò segue subito $c(x)=\frac{2}{x+2}$. Ora dobbiamo determinare il valore di x tale che $c(x)=\frac{1}{4}$. Allora la distanza minima del nascondiglio di Wenra risulta pari a 6 pertiche. La risposta è **6**.

17. L'inseguimento disperato di Wenra

Tre numeri dispari consecutivi si possono scrivere facilmente nella forma $d-2$, d , $d+2$, dove d indica un generico numero dispari. Allora $n=(d-2)^2+d^2+(d+2)^2=3d^2+8$ e quindi n è dispari. Ne segue che n può essere solo 1111, 3333, 5555, 7777, 9999. Ma $n=3d^2+8$ non è divisibile per 3 quindi n non può essere né 3333, né 9999. Ora consideriamo gli altri numeri: 1111 - 8 = 1103 non è divisibile per 3; invece 5555 - 8 = 5547 è divisibile per 3, e 1849 = 43^3 è un quadrato perfetto; 7777 - 8 = 7769 non è divisibile per 3. La terna cercata è (41,43,45). La risposta è quindi **129**.

18. L'esperimento dei cilindri

Il numero di tutte le possibili 10 manovre fatte azionando ognuna delle nove leve almeno una volta ed esattamente solo una leva due volte è uguale al numero di sequenze di 10 cifre (da 1 a 9) che contengono esattamente una cifra ripetuta:

$$N=9\cdot\binom{10}{2}\cdot 8!=\frac{9\cdot 10!\cdot 8!}{2!\cdot 8!}=45\cdot 9!.$$

Il numero di tutte le possibili 10 manovre fatte azionando ognuna delle nove leve almeno una volta ed esattamente solo una leva due volte consecutivamente è uguale al numero di sequenze di 10 cifre (da 1 a 9) che contengono esattamente una cifra ripetuta *due volte di seguito*:

$$N_S=9\cdot 9\cdot 8!=9\cdot 9!.$$

Il numero di tutte le possibili 10 manovre fatte azionando le nove leve è uguale al numero di sequenze di 10 cifre (da 1 a 9)

$$N_T=9^{10}.$$

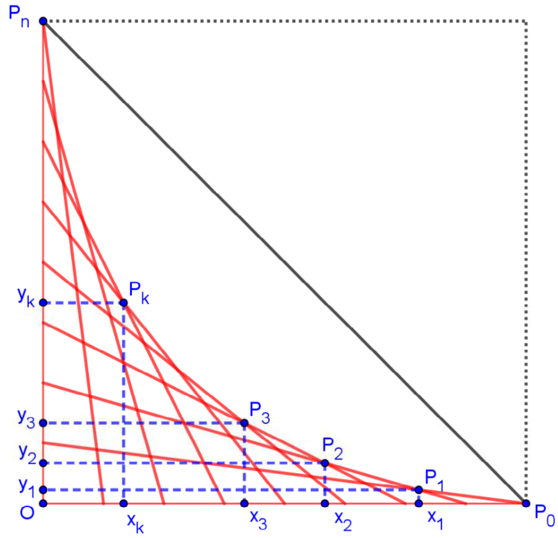
La probabilità di salvezza sarà dunque:

$$P=\frac{N-N_S}{N_T}=\frac{45\cdot 9!-9\cdot 9!}{9^{10}}=\frac{36\cdot 9!}{9^{10}}=\frac{4\cdot 8!}{9^8}=\frac{17920}{4782969}.$$

La risposta è dunque **0889**.

19. Una strana ragnatela

Si può subito osservare che la figura è simmetrica rispetto alle diagonali del quadrato e che, per risolvere il problema, è sufficiente trovare l'area occupata dalla ragnatela in uno dei quattro triangoli isosceli. Sia a la misura del lato del triangolo isoscele (metà della diagonale del quadrato). Fissiamo un sistema di riferimento con origine O nel centro del quadrato e unità di misura pari ad a. Consideriamo ora le rette (fili) che formano la ragnatela ottenute dividendo il lato sinistro e il lato inferiore del quadrato in n parti uguali e congiungendo i vari punti come mostrato in figura. Sia r_0 la retta orizzontale di equazione $y=0$. Sia r_1 la retta passante per i punti $R_1(1,0)$ e $Q_1\left(0,\frac{1}{n}\right)$, sia r_2 la retta passante per i punti $R_2\left(\frac{n-1}{n},0\right)$ e $Q_2\left(0,\frac{2}{n}\right)$, sia r_3 la retta passante per i punti $R_3\left(\frac{n-2}{n},0\right)$ e $Q_3\left(0,\frac{3}{n}\right)$, … , sia r_k la retta passante per i punti $R_k\left(\frac{n-k+1}{n},0\right)$ e $Q_k\left(0,\frac{k}{n}\right)$, … , sia r_n la retta passante per $R_n\left(\frac{1}{n},0\right)$ e $Q_n(0,1)$ e sia infine r_{n+1} la retta verticale di equazione $x=0$. Le equazioni di tali rette sono:



$$r_0 \to y=0; \qquad r_1 \to y=-\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}; \qquad r_2 \to y=-\frac{2}{n-1}x+\frac{2}{n};$$

$$r_3 \to y=-\frac{3}{n-2}x+\frac{3}{n}; \qquad \dots; \qquad r_k \to y=-\frac{k}{n-k+1}x+\frac{k}{n};$$

$$r_{k+1} \to y=-\frac{k+1}{n-k}x+\frac{k+1}{n}; \qquad \dots; \qquad r_n \to y=-nx+1; \qquad r_{n+1} \to x=0.$$

Indichiamo con P_k l'intersezione di r_{k+1} con r_k e determiniamo le coordinate di tale punto.

$$P_k: \begin{cases} y=-\frac{k+1}{n-k}x+\frac{k+1}{n} \\ y=-\frac{k}{n-k+1}x+\frac{k}{n} \end{cases} \to \begin{cases} -\frac{k+1}{n-k}x+\frac{k+1}{n}=-\frac{k}{n-k+1}x+\frac{k}{n} \\ y=-\frac{k}{n-k+1}x+\frac{k}{n} \end{cases} \to \left(\frac{k+1}{n-k}-\frac{k}{n-k+1}\right)x=\frac{1}{n}$$

$$\frac{n+1}{(n-k)(n-k+1)}x=\frac{1}{n} \to x=\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n+1)} \to y=-\frac{k}{n-k+1}\cdot\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n+1)}+\frac{k}{n}$$

$$y=-\frac{k(n-k)}{n(n+1)}+\frac{k}{n} \to y=\frac{k(k+1)}{n(n+1)} \to P_k\left(\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n+1)},\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right).$$

Soluzione (1) L'area della porzione di ragnatela si può calcolare come somma delle aree di tutti i trapezi rettangoli $Y_{k-1}P_{k-1}P_kY_k$ con $k=1,2,\dots,n$. L'area del k-esimo trapezio si può calcolare come $A_k=\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)(y_k-y_{k-1})$ e quindi l'area della stella sarà $A_{S,n}=\sum_{k=1}^{n}A_k$. Iniziamo a svolgere i calcoli dei vari pezzi.

$$x_{k-1}+x_k=\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{n(n+1)}+\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n+1)}=\frac{(n-k+1)(2n-2k+2)}{n(n+1)}+\frac{2(n-k+1)^2}{n(n+1)},$$

$$y_k-y_{k-1}=\frac{k(k+1)}{n(n+1)}-\frac{(k-1)k}{n(n+1)}=\frac{2k}{n(n+1)};$$

$$A_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(n-k+1)^2}{n(n+1)}\cdot\frac{2k}{n(n+1)}=\frac{2k(n-k+1)^2}{n^2(n+1)^2}.$$

Adesso dobbiamo solo calcolare la somma di tutte le aree dei trapezi.

$$A_{S,n}=\sum_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k(n-k+1)^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{2}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)^2=\frac{2}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}k^3-2(n+1)k^2+(n+1)^2k=$$

$$=\frac{2}{n^2(n+1)^2}\left[\sum_{k=1}^{n}k^3-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2\sum_{k=1}^{n}k\right]=$$

$$=\frac{2}{n^2(n+1)^2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}-2(n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{2}{n}\left[\frac{n}{4}-\frac{2n+1}{3}+\frac{n+1}{2}\right]=$$

$$=\frac{2}{n}\cdot\frac{3n-8n-4+6n+6}{12}=\frac{n+2}{6n}.$$

Quindi $A_{S,n}=\frac{n+2}{6n}$. Poiché l'area di OP_0P_n è pari a $\frac{1}{2}$, il rapporto tra l'area della porzione di ragnatela e l'area del triangolo stesso corrisponde a $\frac{n+2}{3n}$. Per $n=100$, $\frac{102}{300}=\frac{17}{50}$. La risposta è dunque **67**.

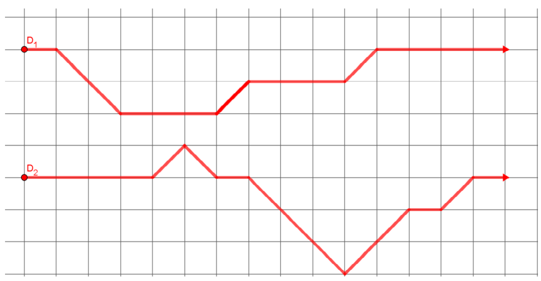
Soluzione (2) L'area della porzione di ragnatela compresa nel primo quadrante si può calcolare come somma delle aree dei triangoli $P_kR_kR_{k+1}$ con $k=1,2,\ldots,n$ e $R_k\left(\frac{n-k+1}{n},0\right)$. Gli n triangoli hanno basi di uguale lunghezza $R_kR_{k+1}=\frac{1}{n}$ e l'altezza del k-esimo triangolo coincide con l'ordinata di P_k. L'area da calcolare è dunque data da:

$$A_{S,n}=\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{2n^2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=$$

$$=\frac{1}{2n^2(n+1)}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{1}{2n^2(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{6}\cdot(2n+1+3)=\frac{1}{12n}\cdot(2n+4)=\frac{n+2}{6n}.$$

Poiché l'area di OP_0P_n è pari a $\frac{1}{2}$, il rapporto tra l'rea della porzione di ragnatela e l'area del triangolo stesso corrisponde a $\frac{n+2}{3n}$. Per $n=100$, $\frac{102}{300}=\frac{17}{50}$. La risposta è dunque **67**.

20. Tempesta di fiamme



Consideriamo 15 aste infuocate che escono da uno delle dita del mago. Il primo caso è il raggio rettilineo, tutte le 15 aste allineate con il dito, e si ha solo $N_0=1$ possibilità. Il secondo caso è il raggio con due aste oblique. Essendo il primo e l'ultimo tratto allineati con il dito e l'obiettivo è sufficiente considerare le 13 aste intermedie 2 dei quali devono essere obliqui. Quindi i casi possibili sono dati dagli anagrammi di una parola di 13 lettere di cui 11 — (aste allineate), una / e una \ (aste oblique). Il loro numero è pari a

$$N_2=\frac{13!}{11!\cdot 1!\cdot 1!}=12\cdot 11=156.$$

Il terzo caso è il raggio con quattro aste oblique. I casi possibili sono dati dagli anagrammi di una parola di 13 lettere di cui 9 —, 2 / e 2 \. Il loro numero è pari a

$$N_4=\frac{13!}{9!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4}=13\cdot 3\cdot 11\cdot 10=4290.$$

Il quarto caso è il raggio con sei aste oblique. I casi possibili sono dati dagli anagrammi di una parola di 13 lettere di cui 7 —, 3 / e 3 \. Il loro numero è pari a

$$N_6 = \frac{13!}{7! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 8 = 34320 .$$

Il quinto caso è il raggio con otto aste oblique. I casi possibili sono dati dagli anagrammi di una parola di 13 lettere di cui 5 —, 4 / e 4 \. Il loro numero è pari a

$$N_8 = \frac{13!}{5! \cdot 4! \cdot 4!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 = 90090 .$$

Il sesto caso è il raggio con dieci aste oblique. I casi possibili sono dati dagli anagrammi di una parola di 13 lettere di cui 3 —, 5 / e 5 \. Il loro numero è pari a

$$N_{10} = \frac{13!}{3! \cdot 5! \cdot 5!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 72072 .$$

Il quinto caso è il raggio con dodici aste oblique. I casi possibili sono dati dagli anagrammi di una parola di 13 lettere di cui 1 —, 6 / e 6 \. Il loro numero è pari a

$$N_{12} = \frac{13!}{1! \cdot 6! \cdot 6!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 12012 .$$

Allora il numero di possibili traiettorie dei raggi di fuoco che escono da ciascun dito del mago è:

$$N = N_0 + N_2 + N_4 + N_6 + N_8 + N_{10} + N_{12} = 1 + 156 + 4290 + 34320 + 90090 + 72072 + 12012 = 212941 .$$

La risposta è dunque **2941**.