Liceo Scientifico "Amedeo di Savoia" Pistoia

3° Premio "Alessandro Rabuzzi"

Gara a squadre di matematica - 16 Febbraio 2018

IL CASTELLO DI CAGLIOSTRO

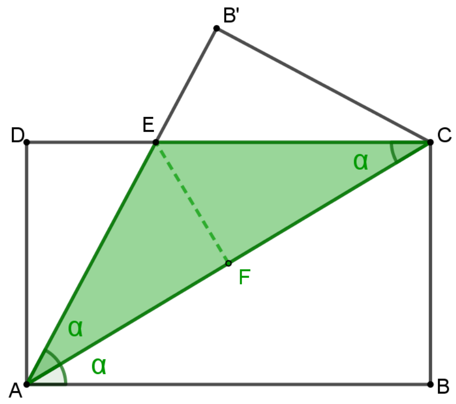
SOLUZIONI

1. Fuga dal Casinò di Montecarlo	**0173**
2. All'inseguimento della sposa	**0006**
3. L'hanno portata via su uno strano battello a vapore	**1901**
4. Gli assassini ninja del Conte	**0041**
5. Arrivano rinforzi	**0433**
6. Le difese del castello	**0050**
7. Lupin o Zenigata???	**0036**
8. Lupin mette le ali	**4312**
9."Buonasera signor ladro!"	**0015**
10. Lo stregone rompe l'incantesimo del ladro	**1377**
11. Fuga dai sotterranei	**0070**
12. A bordo dell'autogiro	**0180**
13. Il sacrificio di Clarisse	**7478**
14. "CLARisse! .. CARL!" tornano i ricordi	**0840**
15. Il matrimonio	**0654**
16. E adesso fuochi d'artificio!	**0032**
17. Gli ingranaggi dell'orologio	**2666**
18. L'ora della resa dei conti	**0111**
19. Il segreto di Cagliostro	**1071**
20. Arrivederci principessa Clarisse!	**1000**

SOLUZIONI

1. Fuga dal Casinò di Montecarlo

La parte di foglio che si sovrappone piegando lungo la diagonale AC è costituita dal triangolo ACE. Tale triangolo è isoscele, poiché come si può osservare facilmente ha due angoli congruenti.



Soluzione (1) Indichiamo con x la lunghezza della base AB, lato maggiore del foglio rettangolare, e con y il lato minore BC. La misura della diagonale AC è quindi pari a $\sqrt{x^2+y^2}$. L'altezza EF relativa alla base del triangolo isoscele ACE si può ottenere dalla similitudine del triangoli rettangoli AFE e ABC.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} \quad \rightarrow \quad \overline{EF} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AE} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2a} \ .$$

L'area di ACE è data da:

$$A_{AEC} = \overline{AE} \cdot \overline{EF} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \cdot \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x} = \frac{y\left(x^2+y^2\right)}{4x} \ .$$

Ora l'area di ACE deve essere un terzo dell'area del foglio rettangolare ABCD, e quindi si ha:

$$A_{AEC} = \frac{1}{3} A_{ABCD} \quad \rightarrow \quad \frac{y\left(x^2+y^2\right)}{4x} = \frac{xy}{3} \quad \rightarrow \quad x^2+y^2 = \frac{4}{3}x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 3y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = \sqrt{3} \ .$$

La risposta è **173**.

Soluzione (2) L'area del triangolo ACE è 1/3 dell'area del rettangolo, quindi è 2/3 dell'area del triangolo ACD e pertanto dovrà essere $\overline{EC} = \frac{2}{3}\overline{CD}$ avendo i due triangoli la stessa altezza. Allora $\overline{EC} = 2\overline{DE}$, e quindi $\overline{AE} = 2\overline{DE}$ (ACE è isoscele). Ciò implica $A\hat{E}D = 60°$ e di conseguenza $A\hat{C}E = \alpha = 30°$, da cui infine $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \sqrt{3}$. La risposta è **173**.

2. All'inseguimento della sposa

Consideriamo l'equazione nelle incognite $x, y \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(x-y)^4+(x+y)^4}{2} - \left(x^4+y^4\right) = 864 \ .$$

Svolgendo i calcoli a primo membro si ottiene:

$$\frac{(x-y)^4+(x+y)^4}{2} - \left(x^4+y^4\right) = \frac{x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4+x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}{2} - x^4 - y^4 =$$

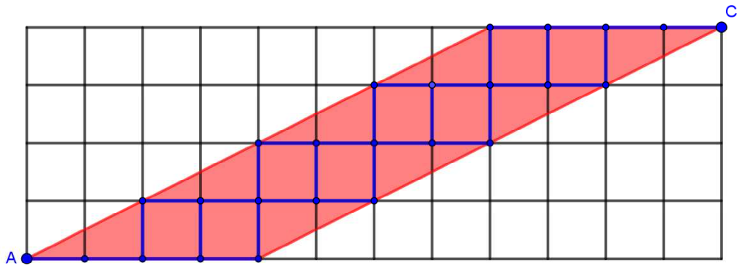
$$= \frac{2x^4+12x^2y^2+2y^4}{2} - x^4 - y^4 = 6x^2y^2 = 864 \quad \rightarrow \quad x^2y^2 = 144 .$$

Scomponendo 144 in fattori primi si ha $2^4 \cdot 3^2$. Le coppie di numeri naturali (x, y) con la proprietà richiesta sono quindi (1,12), (2,6), (3,4), (4,3), (6,2) e (12,1). La risposta è **6**.

3. L'hanno portata via su uno strano battello a vapore

Una sequenza di 16 fumate casuali, 12 Grigie e 4 Nere si può vedere, all'interno di una griglia 12x4 dove ogni casella orizzontale rappresenta una fumata G e ogni casella verticale una fumata N, come una sequenza di 16 lettere tra 12 G e 4 N che permetta di andare dal vertice A al vertice C ad esso opposto. Per spostarsi da A fino a C si devono quindi compiere 4 spostamenti verticali (fumate N) e 12 orizzontali (fumate G). Il numero di cammini possibili è quindi dato dal numero di anagrammi di una parola di 16 lettere contenente 12 "G" e 4 "N", cioè $n=\frac{16!}{12!\cdot 4!}$. Invece il numero cammini che rispettano la condizione $0\le G-2N\le 4$ sono solo quelli interni alla striscia rossa, cioè la striscia delimitata dal sistema di disequazioni

$$\begin{cases} N\le \frac{1}{2}G \\ N\ge \frac{1}{2}G-2 \end{cases}.$$



Dalla figura risulta evidente che tale numero dipende esclusivamente dai 4 rettangoli 2x1 evidenziati in blu, il primo e l'ultimo tratto orizzontale sono obbligatori. Per passare da un vertice a quello opposto di ogni rettangolo 2x1 ho 3 possibili percorsi (gli anagrammi della parola "NGG"), pertanto il numero totale di cammini interni alla striscia rossa è $r=3^4=81$. Quindi la probabilità che una sequenza di 16 fumate 4 N e 12 G rispetti la condizione è $p=\frac{r}{n}=\frac{3^4\cdot 4!}{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}=\frac{81}{2\cdot 5\cdot 14\cdot 13}=\frac{81}{1820}$. La risposta è **1901**.

4. Gli assassini ninja del Conte

Per un qualsiasi polinomio $p(x)$ di grado 2017 si può osservare che $p(1)=a_{2017}+a_{2016}+\ \dots\ +a_1+a_0$ e $p(-1)=-a_{2017}+a_{2016}+\ \dots\ +a_2-a_1+a_0$. Allora si ha:

$$a_{2017}+a_{2015}+\ \dots\ +a_3+a_1=\frac{p(1)-p(-1)}{2}=\frac{262143-262145}{2}=-1;$$

$$a_{2016}+a_{2014}+\ \dots\ +a_2+a_0=\frac{p(1)+p(-1)}{2}=\frac{262143+262145}{2}=262144.$$

Allora $(a_{2017}+a_{2015}+\ \dots\ +a_3+a_1)^{2018}+20\cdot\sqrt[18]{a_{2016}+a_{2014}+\ \dots\ +a_2+a_0}=(-1)^{2018}+20\cdot\sqrt[18]{262144}=1+20\cdot 2=41$.
La risposta è **41**.

5. Arrivano rinforzi

Prima di tutto prendiamo un dado cubico che abbia il simbolo del Caprone su una faccia, Il volto del Conte su due facce e Il volto della Duchessa su tre facce. Le probabilità di uscita dei tre simboli con un lancio sono rispettivamente $p(CA)=\frac{1}{6}$, $p(CO)=\frac{1}{3}$ e $p(DU)=\frac{1}{2}$.

Quanti sono i dadi che compongono una serie tanti quante le funzioni che associano ai tre simboli i numeri delle facce che ognuno di essi occupa su un dado, cioè $P_3=3!=6$. Qual è la probabilità di ottenere il simbolo del Caprone su tutti i 6 dadi di una serie lanciati? Basta guardare la colonna della tabella relativa al Caprone che riporta il numero di facce con un determinato simbolo su ognuno dei 6 dadi della serie.

	Caprone	Conte	Duchessa
Dado 1	1	2	3
Dado 2	1	3	2
Dado 3	2	1	3
Dado 4	2	3	1
Dado 5	3	1	2
Dado 6	3	2	1

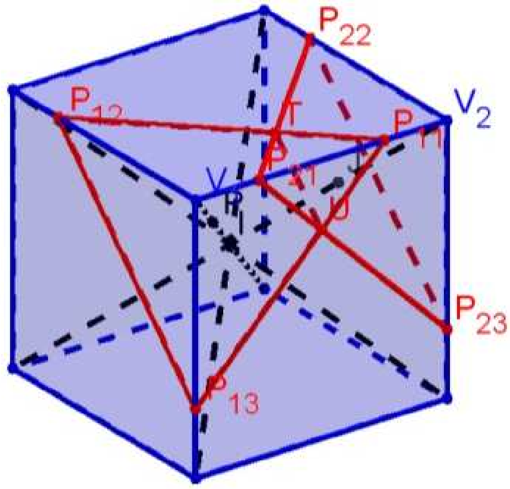
Allora $p(6CA)=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{1296}$, ma analogamente $p(6CO)=p(6DU)=\frac{1}{1296}$. Segue che la probabilità di avere su tutte le facce dei 6 dadi lo stesso simbolo è $p(6X)=3\cdot\frac{1}{1296}=\frac{1}{432}$. La risposta è **433**.

6. Le difese del castello

Sia L la misura dello spigolo del cubo. Dati due punti A e B nello spazio il luogo geometrico dei punti equidistanti da essi è costituito dal piano passante per il punto medio del segmento AB e perpendicolare al segmento stesso. Tale piano prende il nome di piano assiale del segmento AB. La distanza del centro del cubo da ogni suo vertice V_i è la metà della diagonale del cubo, cioè $\overline{CV_i} = \frac{\sqrt{3}}{2}L$, e da ciò segue che, detto M_i il punto medio del segmento CV_i, $\overline{CM_i} = \overline{V_iM_i} = \frac{\sqrt{3}}{4}L$. Siano $P_{i,k}$, con k = 1, 2, 3, i punti in cui il piano assiale del segmento CV_i interseca i tre spigoli del cubo convergenti in V_i. Il solido di vertici $V_iP_{i,1}P_{i,2}P_{i,3}$ è una piramide retta che ha come base il triangolo equilatero $P_{i,1}P_{i,2}P_{i,3}$, come facce laterali tre triangoli rettangoli isosceli e come altezza V_iM_i. Allora si ha $\overline{V_iP_{i,k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{P_{i,j}P_{i,k}}$, $\overline{M_iP_{i,k}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{P_{i,j}P_{i,k}}$. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $V_iM_iP_{i,k}$: $\overline{V_iP_{i,k}}^2 = \overline{V_iM_i}^2 + \overline{M_iP_{i,k}}^2$. Indicando con $x = \overline{P_{i,j}P_{i,k}}$ si può scrivere:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}L\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2 \rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{3}{16}L^2 + \frac{x^2}{3} \rightarrow \frac{x^2}{6} = \frac{3}{16}L^2 \rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}L.$$

Ora poiché $\overline{V_iP_{i,k}} = \frac{3}{4}L$, vuol dire che due piramidi, che hanno i vertici appartenenti a uno stesso spigolo, si intersecano formando un tetraedro con due facce a forma di triangolo rettangolo isoscele giacenti sulle due facce del cubo che individuano lo spigolo. Il luogo geometrico cercato è costituito da un solido con 14 facce di cui 6 quadrate e 8 esagonali. Il volume di tale solido è dato dal volume del cubo meno i volumi delle otto piramidi $V_iP_{i,1}P_{i,2}P_{i,3}$, più i volumi dei dodici tetraedri intersezione di coppie di piramidi. Quindi il suo volume è dato da $V = V_{cubo} - 8\cdot V_{piramide} + 12\cdot V_{tetraedro}$. Calcoliamo il volume di una piramide:



$$V_{piramide} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\overline{P_{i,j}P_{i,k}}^2\cdot\overline{V_iM_i} = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}L\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}L = \frac{9}{128}L^3.$$

Calcoliamo ora il volume del tetraedro $TP_{1,1}P_{2,1}U$ in figura. Si ha $\overline{P_{1,1}P_{2,1}} = \frac{1}{2}L$ ipotenusa della base $P_{1,1}P_{2,1}U$ e $\overline{P_{1,1}T} = \overline{P_{2,1}T} = \frac{1}{2\sqrt{2}}L$ cateti della base; l'altezza del tetraedro ha misura pari a metà del segmento $P_{1,1}P_{2,1}$, cioè $\overline{TH} = \frac{1}{4}L$. Il volume del tetraedro risulta quindi:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{P_{1,2}T}^2\cdot\overline{TH} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}L\right)^2\cdot\frac{1}{4}L = \frac{1}{192}L^3$$

Sostituendo nelle formule dei volumi i valori trovati si ottiene:

$$V = V = V_{cubo} - 8\cdot V_{piramide} + 12\cdot V_{tetraedro} = L^3 - 8\cdot\frac{9}{128} + 12\cdot\frac{1}{192} = L^3 - \frac{9}{16}L^3 + \frac{1}{16}L^3 = \frac{1}{2}L^3.$$

Allora il rapporto tra il volume del luogo geometrico cercato e il volume del cubo, cioè $\frac{V}{V_{cubo}} = \frac{1}{2}$. La percentuale è quindi il 50%. La risposta è **50**.

7. Lupin o Zenigata???

Sia N il numero totale di poliziotti giapponesi comandati dall'ispettore Zenigata. Se vuole costruire uno schieramento a forma di triangolo equilatero con *n* soldatini per lato, si ha bisogno di $\frac{n(n+1)}{2}$ soldatini. Se invece vuole costruire uno schieramento a forma di esagono regolare con *m* soldatini per lato, si ha bisogno di $6\frac{m(m+1)}{2} - 6(m-1) - 5$ soldatini. Ora nel primo caso il comandante Zenigata è escluso dalla formazione, mentre nel secondo caso occupa la posizione centrale della formazione, allora $N = \frac{n(n+1)}{2}$ e

$N=3m(m+1)-6(m-1)-5-1$. Uguagliando le due espressioni si ha $\frac{n(n+1)}{2}=3m^2-3m$ → $(n+1)n=6m(m-1)$. Quindi si devono trovare due numeri consecutivi il cui prodotto è uguale a 6 volte il prodotto di due numeri consecutivi più piccoli. Posto $m \geq 2$ (numero di soldatini sul lato dell'esagono regolare, si ha:

$6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ e $4 \cdot 3 = 12$ → esagono di lato 2 e triangolo di lato 3 per un totale di 6 poliziotti;
$6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ → nessuna formazione triangolare con questi numeri;
$6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ e $9 \cdot 8 = 72$ → esagono di lato 4 e triangolo di lato 8 per un totale di 36 poliziotti;
$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ → nessuna formazione triangolare con questi numeri;
$6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ → nessuna formazione triangolare con questi numeri;
$6 \cdot 7 \cdot 6 = 252$ → nessuna formazione triangolare con questi numeri;
$6 \cdot 8 \cdot 7 = 336$ → nessuna formazione triangolare con questi numeri;
$6 \cdot 9 \cdot 8 = 432$ → nessuna formazione triangolare con questi numeri;
$6 \cdot 10 \cdot 9 = 540$ → nessuna formazione triangolare con questi numeri.
La risposta è **36**.

8. Lupin mette le ali

I numeri palindromi di quattro cifre si scrivono nella forma αββα. Affinché tale numero sia pari si deve avere α uguale a una cifra pari diversa da 0, mentre β può essere una cifra qualsiasi. Tali numeri risultano quindi 40. Consideriamo tutti i palindromi con α = 2 e usiamo il criterio di divisibilità per 7 (si considera il numero privato della cifra delle unità e ad esso si sottrae il doppio della cifra delle unità; se il numero ottenuto è 0 o un multiplo di 7, allora il nostro numero è divisibile per 7).

2002 → 200 - 4 = 196 → 19 - 12 = 7 **Si**; 2112 → 211 - 4 = 207 → 20 - 14 = 6 No;
2222 → 222 - 4 = 198 → 19 - 16 = 3 No; 2332 → 233 - 4 = 229 → 22 - 18 = 4 No;
2442 → 244 - 4 = 240 → 24 - 0 = 24 No; 2552 → 255 - 4 = 251 → 25 - 2 = 23 No;
2662 → 266 - 4 = 262 → 26 - 4 = 24 No; 2772 → 277 - 4 = 273 → 27 - 6 = 21 **Si**;
2882 → 288 - 4 = 284 → 28 - 8 = 20 No; 2992 → 299 - 4 = 295 → 29 - 10 = 19 No.
Consideriamo tutti i palindromi con α = 4 e ripetiamo il ragionamento.
4004 → è multiplo di 2002 **Si**; 4114 → 411 - 8 = 403 → 40 - 6 = 34 No;
4224 → 422 - 8 = 414 → 41 - 8 = 33 No; 4334 → 433 - 8 = 425 → 42 - 10 = 32 No;
4444 → 444 - 8 = 436 → 43 - 12 = 31 No; 4554 → 455 - 8 = 447 → 44 - 14 = 30 No;
4664 → 466 - 8 = 458 → 45 - 16 = 29 No; 4774 → 477 - 8 = 469 → 46 - 18 = 28 **Si**;
4884 → 488 - 8 = 480 → 48 - 0 = 48 No; 4994 → 499 - 8 = 491 → 49 - 2 = 47 No.
Consideriamo tutti i palindromi con α = 6 e ripetiamo il ragionamento.
6006 → è multiplo di 2002 **Si**; 6116 → 611 - 12 = 599 → 59 - 18 = 34 No;
6226 → 622 - 12 = 414 → 41 - 8 = 33 No; 6336 → 633 - 12 = 621 → 62 - 2 = 60 No;
6446 → 644 - 12 = 632 → 63 - 4 = 59 No; 6556 → 655 - 12 = 643 → 64 - 6 = 58 No;
6666 → 666 - 12 = 654 → 65 - 8 = 57 No; 6776 → 677 - 12 = 665 → 66 - 10 = 56 **Si**;
6886 → 688 - 12 = 676 → 67 - 12 = 48 No; 6996 → 699 - 12 = 687 → 68 - 14 = 54 No.
Consideriamo tutti i palindromi con α = 8 e ripetiamo il ragionamento.
8008 → è multiplo di 2002 **Si**; 8118 → 811 - 16 = 795 → 79 - 1 = 69 No;
8228 → 822 - 16 = 806 → 80 - 12 = 68 No; 8338 → 833 - 16 = 817 → 81 - 14 = 67 No;
8448 → 844 - 16 = 828 → 82 - 16 = 66 No; 8558 → 855 - 16 = 839 → 83 - 18 = 65 No;
8668 → 866 - 16 = 850 → 85 - 0 = 85 No; 8778 → 877 - 16 = 861 → 86 - 2 = 84 **Si**;
8888 → 888 - 16 = 872 → 87 - 4 = 83 No; 8998 → 899 - 16 = 883 → 88 - 6 = 82 No.

Allora i numeri palindromi cercati sono: 2002, 2772, 4004, 4774, 6006, 6776, 8008, 8778. Prendiamo il numero 2002: esistono 2002 coppie di numeri interi non nulli la cui media è 2002 {(1,4003), (2,4002), ... , (2000,2004), (2001,2003), (2002,2002)}. Così per 2772 di coppie con tali caratteristiche ce ne sono 2772, e così via per gli altri 6 palindromi trovati, 4004, 4774, 6006, 6776, 8008, 8778. Sommando i risultati ottenuti si ottiene:
2002 + 2772 + 4004 + 4774 + 6006 + 6776 + 8008 + 8778 = 43120. La risposta è **4312**.

9."Buonasera signor ladro"

Consideriamo l'equazione $2018x+80-y=xy$ e riscriviamola cercando di raccogliere dei fattori:

$$2018x+80-y=xy \;\rightarrow\; 80=xy+y-2018x \;\rightarrow\; -2018+80=y(x+1)-2018x-2018$$

$$-1936=y(x+1)-2018(x+1) \;\rightarrow\; (x+1)(y-2018)=-1938 \;\rightarrow\; (x+1)(2018-y)=1938.$$

Possiamo allora scrivere più semplicemente $A\cdot B=1938$, dove $A=x+1$, $A\geq 2$ e $B=2018-y$, $0<B\leq 2017$. Si tratta adesso di trovare i divisori di 1938. Scomponiamo in fattori primi $1938=2\cdot 3\cdot 17\cdot 19$. Il numero di divisori di 1938 è $2^4=16$. Poiché $A\geq 2$ allora devo scartare dai divisori il valore 1. Quindi il numero di coppie cercate è 15. Vediamo i vari casi che si presentano:

$A=2 \Rightarrow B=969$ allora $x=1$ e $y=1049$,
$A=3 \Rightarrow B=646$ allora $x=2$ e $y=1372$,
$A=6 \Rightarrow B=323$ allora $x=5$ e $y=1695$,
$A=17 \Rightarrow B=114$ allora $x=16$ e $y=1904$,
$A=19 \Rightarrow B=102$ allora $x=18$ e $y=1916$,
$A=34 \Rightarrow B=57$ allora $x=33$ e $y=1961$,
$A=38 \Rightarrow B=51$ allora $x=37$ e $y=1967$,
$A=51 \Rightarrow B=38$ allora $x=50$ e $y=1980$,
$A=57 \Rightarrow B=34$ allora $x=56$ e $y=1984$,
$A=102 \Rightarrow B=19$ allora $x=101$ e $y=1999$,
$A=114 \Rightarrow B=17$ allora $x=113$ e $y=2001$,
$A=323 \Rightarrow B=6$ allora $x=322$ e $y=2012$,
$A=646 \Rightarrow B=3$ allora $x=645$ e $y=2015$,
$A=969 \Rightarrow B=2$ allora $x=968$ e $y=2016$,
$A=1938 \Rightarrow B=1$ allora $x=1937$ e $y=2017$,

La risposta è quindi **15**.

10. Lo stregone rompe l'incantesimo del ladro

Sia $q(x)$ un polinomio monico di secondo grado tale che $q(x+1)+q(x)=2x^2+2x+11$ per ogni *x*. Se poniamo $x=0$ si ottiene $q(1)+q(0)=11$, se invece poniamo $x=-1$ si ottiene $q(0)+q(-1)=11$. Sottraendo membro a membro la seconda relazione alla prima si trova che $q(1)=q(-1)$. Determiniamo il polinomio $q(x)=x^2+bx+c$. Poiché $q(1)=q(-1)$ si ha $q(1)=1+b+c=1-b+c=q(-1)$, da cui risulta $b=0$ e quindi $q(x)=x^2+c$. Dunque sostituendo $q(x)$ e $q(x+1)=(x+1)^2+c$ nella relazione iniziale si ha $(x+1)^2+c+x^2+c=2x^2+2x+11 \rightarrow 2x^2+2x+2c+1=2x^2+2x+11 \rightarrow c=5 \rightarrow q(x)=x^2+5$. Poiché $q(1)=q(-1)=6$, ne segue che i polinomi $p(x)$ di grado 36 con coefficienti naturali cercati soddisfano le condizioni $p(1)=a_{36}+a_{35}+\ldots+a_1+a_0=6$, $p(-1)=a_{356}-a_{35}+\ldots-a_1+a_0=6$. Si può verificare facilmente che $\frac{p(1)+p(-1)}{2}=a_{36}+a_{34}+\ldots+a_2+a_0=6$. Poiché $a_k\in\mathbb{N},\ \forall k=0,1,\ldots,36$ e $p(1)=a_{36}+a_{35}+\ldots+a_1+a_0=6$ che $a_k=0$ per si ha che ogni *k* dispari. Ci sono quindi 6 punti da distribuire tra i coefficienti di posto pari che sono 19. Si sa però che il polinomio deve avere grado 36 quindi $a_{36}\neq 0$, quindi almeno uno dei 6 punti va riservato ad a_{36} ed inoltre va rispettata la condizione che i coefficienti non nulli di $p(x)$ sono tali che $a_i\geq a_j,\ \forall i\geq j,\quad a_i\neq 0,\quad a_j\neq 0$. Vediamo i vari casi che si possono presentare.

- Se $a_{36}=6$, c'è 1 solo polinomio $p(x)=6x^{36}$.
- Se $a_{36}=5$, solo uno dei restanti coefficienti è uguale 1 e quindi ci sono 18 polinomi.
- Se $a_{36}=4$, si hanno due casi: due coefficienti non nulli uguali a 1, oppure un solo coefficiente non nullo uguale a 2. Nel primo caso i polinomi sono tanti quanti gli anagrammi di una parola formata

da 18 simboli di cui 16 sono "zero" e 2 sono "uno", cioè $\frac{18!}{2!\cdot 16!}=\frac{18\cdot 17}{2}=9\cdot 17=153$. Nel secondo caso solo uno dei restanti coefficienti è uguale 2 e quindi ci sono 18 polinomi.

- Se $a_{36}=3$, si hanno tre casi: tre coefficienti non nulli uguali a 1, oppure due coefficienti non nulli il primo uguale a 2 (quello a sinistra) e il secondo uguale a 1, oppure un coefficiente non nullo uguale a 3. Nel primo caso i polinomi sono tanti quanti gli anagrammi di una parola formata da 18 simboli di cui 15 "zero" e 3 "uno", cioè $\frac{18!}{3!\cdot 15!}=\frac{18\cdot 17\cdot 16}{6}=3\cdot 17\cdot 16=816$. Nel secondo caso basta che scelga due coefficienti tra i 18 rimasti e che poi su quello di sinistra metta il 2 e su quello di destra metta l'1; i polinomi in questo caso sono $\frac{18!}{2!\cdot 16!}=153$. Nel terzo caso invece solo uno dei restanti coefficienti è uguale 3 e quindi ci sono 18 polinomi.
- Se $a_{36}=2$, si hanno tre casi: quattro coefficienti non nulli uguali a 1, oppure tre coefficienti non nulli il primo uguale a 2 (quello a sinistra) e il secondo e il terzo uguali a 1, oppure due coefficienti non nulli uguali a 2. Nel primo caso i polinomi sono tanti quanti gli anagrammi di una parola formata da 18 simboli di cui 14 sono "zero" e 4 sono "uno", cioè $\frac{18!}{4!\cdot 14!}=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{24}=3\cdot 17\cdot 4\cdot 15=3060$. Nel secondo caso basta che scelga tre coefficienti tra i 18 rimasti e che poi su quello di sinistra metta il 2 e sugli ultimi due metta l'1; i polinomi in questo caso sono $\frac{18!}{3!\cdot 15!}=816$. Nel terzo caso invece solo due dei restanti coefficienti sono uguali a 2 e quindi ci sono $\frac{18!}{2!\cdot 16!}=153$ polinomi.
- Se $a_{36}=1$ si devono avere altri 5 coefficienti uguali a 1. Quindi i polinomi sono tanti quanti gli anagrammi di una parola formata da 18 simboli di cui 13 sono "zero" e 5 sono "uno", cioè $\frac{18!}{5!\cdot 13!}=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{120}=3\cdot 17\cdot 4\cdot 3\cdot 14=8568$.

Riassumendo per $a_{36}=6$ si hanno $n_6=1$ polinomi; per $a_{36}=5$ si hanno $n_5=18$ polinomi; per $a_{36}=4$ si hanno $n_4=153+18=171$ polinomi; per $a_{36}=3$ si hanno $n_3=816+153+18=987$ polinomi; per $a_{36}=2$ si hanno $n_2=3060+816+153=4029$ polinomi; infine per $a_{36}=1$ si hanno $n_1=8568$ polinomi. Sommando tutti i valori ottenuti nei sei diversi casi si ottiene:

$$1+18+171+987+4029+8568=13774.$$

La risposta è **1377**.

11. Fuga dai sotterranei

Svolgiamo i calcoli in maniera furba, raccogliendo a numeratore 2^3:

$$\sqrt{\frac{100^3-98^3+\ldots+8^3-6^3+4^3-2^3}{103}}=\sqrt{\frac{2^3\left(50^3-49^3+\ldots+4^3-3^3+2^3+1^3\right)}{103}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2^3\left(\sum_{k=1}^{25}(2k)^3-\sum_{k=1}^{25}(2k-1)^3\right)}{103}}=\sqrt{\frac{2^3\left(8\sum_{k=1}^{25}k^3-\sum_{k=1}^{25}\left(8k^3-12k^2+6k-1\right)\right)}{103}}=\sqrt{\frac{2^3\left(12\sum_{k=1}^{25}k^2-6\sum_{k=1}^{25}k+25\right)}{103}}.$$

È noto che $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$. Utilizzando questi risultati nella nostra espressione si ha:

$$\sqrt{\frac{2^3\left(12\frac{25\cdot 26\cdot 51}{6}-6\frac{25\cdot 26}{2}+25\right)}{103}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot 25\cdot\left(26\cdot 102-3\cdot 26+1\right)}{103}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot 5^2\cdot 2575}{103}}=$$

$$=10\sqrt{\frac{2\cdot 5^2\cdot 103}{103}}=50\cdot\sqrt{2}\simeq 50\cdot 1,4142=70,71\,.$$

La risposta è **70**.

12. A bordo dell'autogiro

Tra i numeri interi positivi minori o uguali di 1500 quelli divisibili per 5 sono 300, quelli divisibili per 2 sono 750, quelli divisibili per 10 sono 150. Allora i numeri cercati sono 1500 - 300 - 750 + 150 = 600. Il minimo dislivello affrontato dai due amici rivali sarà 600·0,3 = 180 metri. La risposta è **180**.

13. Il sacrificio di Clarisse

Ogni meridiano è diviso dai 5 paralleli in 6 archi congruenti di lunghezza 5, a ciascuno dei quali corrisponde un angolo al centro di $\frac{\pi}{6}$. Allora il raggio della sfera è $R=5\cdot\frac{6}{\pi}=\frac{30}{\pi}$. I 5 paralleli corrispondono alle latitudini 60°, 30°, 0°, -30°, e -60°.

Determiniamo ora i raggi dei 5 paralleli: $r_{0°}=R$, $r_{30°}=r_{-30°}=R\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}R$, $r_{60°}=r_{-60°}=R\cos 60°=\frac{R}{2}$. Su ogni parallelo si percorre un arco corrispondente a un angolo al centro di ampiezza $\frac{2}{5}\pi$. Iniziamo adesso a calcolare la distanza totale percorsa: lungo i 6 tratti di meridiani si percorre complessivamente distanza pari a una semicirconferenza di lunghezza πR; lungo il parallelo 0° si percorre un arco di lunghezza $\frac{2}{5}\pi R$; lungo il parallelo 30° e il parallelo -30° si percorre un arco di lunghezza $\frac{2}{5}\pi r_{30°}=\frac{\sqrt{3}}{5}\pi R$; lungo il parallelo 60° e il parallelo -60° si percorre un arco di lunghezza $\frac{2}{5}\pi r_{60°}=\frac{1}{5}\pi R$. La distanza totale percorsa in funzione di R sarà

$$d=\pi R+\frac{2}{5}\pi R+\frac{2\sqrt{3}}{5}\pi R+\frac{2}{5}\pi R=\frac{9+2\sqrt{3}}{5}\pi R\ .$$

Sostituendo il valore trovato di R si ottiene

$$d=\frac{9+2\sqrt{3}}{5}\pi\cdot\frac{30}{\pi}=54+12\sqrt{3}=54+20,7852=74,7852\ .$$

La risposta è **7478**.

14. "CLARisse! .. CARL!" tornano i ricordi

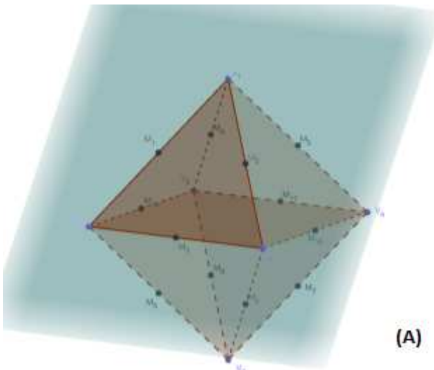
Soluzione (1) Tra tutti gli anagrammi della parola CLARISSE dobbiamo considerare tutti e soli quelli che presentano le lettere C, A, R, L nell'ordine indicato. Le lettere I, S, S, E possono essere inserite tra esse, prima o dopo in qualsiasi modo possibile (esempi SICARESL, CASSIREL, ecc.). È come se avessi 5 contenitori (divisi da 4 separatori C, A, R, L) nei quali devo inserire i 4 oggetti I, S, S, E, di cui due sono uguali tra loro. Se i 4 oggetti fossero tutti uguali avrei gli anagrammi di una parola formata da 4 palline e 4 stanghette di separazione. Il loro numero sarebbe quindi $n=\frac{8!}{4!\cdot 4!}$. Se i 4 oggetti fossero tutti diversi dovremmo moltiplicare *n* per 3!, ma essendo due oggetti uguali tra loro si deve moltiplicare per $\frac{4!}{2!}$. Allora gli anagrammi cercati sono:

$\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2!}=\frac{8!}{4!\cdot 2!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2}=840$. La risposta è **840**.

Soluzione (2) Tra tutti gli anagrammi della parola CLARISSE dobbiamo considerare tutti e soli quelli che presentano le lettere C, A, R, L nell'ordine indicato. Gli anagrammi di CLARISSE sono $n=\frac{8!}{2!}$. Ora se all'interno di ogni anagramma poniamo l'attenzione solo sulle lettere C, A, R, L, le cui possibili permutazioni sono $m = 4! = 24$, a risulta buona solo la sequenza CARL. Allora il numero degli anagrammi cercati sarà dato da $\frac{n}{m} = \frac{8!}{2!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2} = 840$. La risposta è **840**.

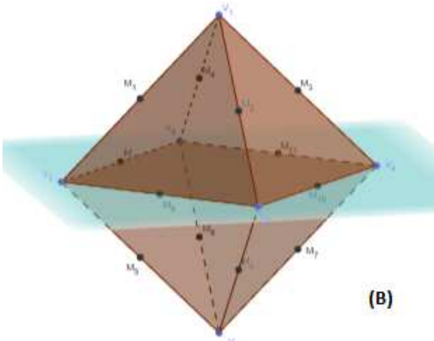
15. Il matrimonio

Esaminiamo i vari casi che si presentano.

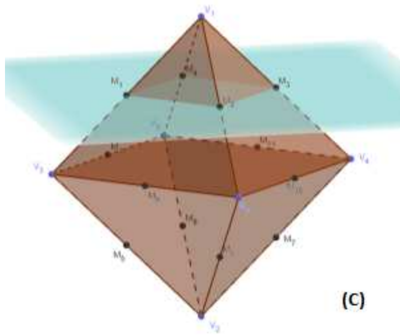

(A)

(A) Consideriamo innanzitutto i punti che stanno su una delle facce: tra i punti considerati non ci sono 4 punti allineati, quindi le quaterne cercate sono $C_{6,4}$. Essendo 8 le facce ne abbiamo $8\cdot C_{6,4}$.

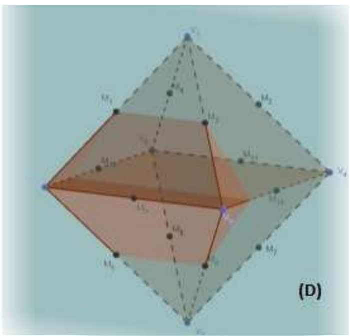
(B) Consideriamo poi i tre quadrati che hanno come lati gli spigoli e passano per il centro dell'ottaedro: tra i punti considerati non ci sono 4 punti allineati, quindi le quaterne cercate sono $C_{8,4}$. Essendo 3 tali quadrati ne abbiamo $3\cdot C_{8,4}$.


(B)

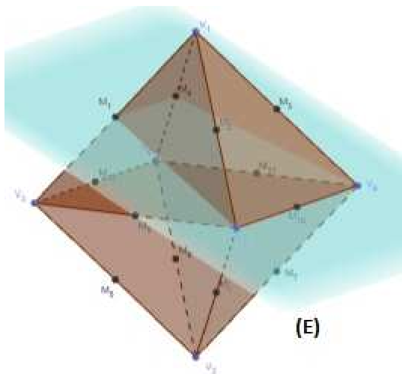
(C) Per ogni vertice dell'ottaedro abbiamo i 4 punti medi degli spigoli che concorrono in quel vertice, quindi in totale altre 6 quaterne di punti complanari.

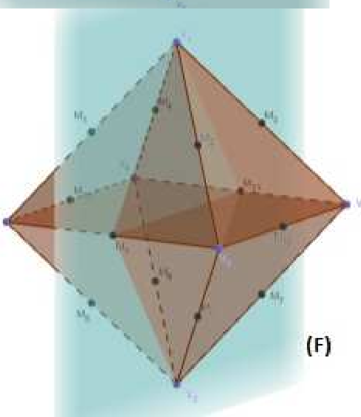

(C)

(D) Consideriamo una coppia di facce con uno spigolo in comune. I quattro punti medi degli spigoli non comuni costituiscono una quaterna di quelle cercate. Quante sono queste coppie? Ogni faccia ha tre facce con uno spigolo in comune, allora il numero di coppie di facce con uno spigolo in comune sono $\frac{8\cdot 3}{2}$ (divido per due per non contare due volte la medesima coppia).


(D)

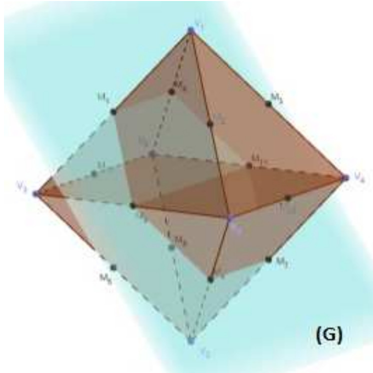
(E) Consideriamo adesso uno spigolo, per esempio lo spigolo $V_5M_{10}V_4$ e la coppia ci punti medi M_4M_1. Questi cinque punti risultano complanari e quindi mi creano 5 quaterne di punti cercate. Inoltre allo spigolo $V_5M_{10}V_4$ è associabile una seconda coppia di punti medi M_8M_5 che ha le stesse caratteristiche e quindi possiamo aggiungere altre 5 quaterne cercate. Essendo gli spigoli 12 ed essendo associate ad ognuno di essi 10 quaterne, ne abbiamo in totale 120.


(E)


(F)

(F) Consideriamo i rombi formati da una coppia di vertici opposti e i punti medi dei lati opposti del quadrato di base delle due piramidi che hanno come vertici quelli considerati. Ad ogni rombo corrisponde una quaterna cercata e per ogni coppia di vertici opposti ci sono due rombi. Dobbiamo quindi aggiungere altre 6 quaterne.

(G) Consideriamo una faccia dell'ottaedro in essa abbiamo 3 coppie di punti medi. Per ognuna di esse troviamo altri 4 punti complanari a formare un esagono regolare (per esempio M_{12}, M_4, M_5, M_7, M_2, M_9). Essendo 8 le facce tali sestine di punti complanari sono 3·8:2 = 12. Il numero di quaterne da contare è quindi $12 \cdot C_{6,4}$.



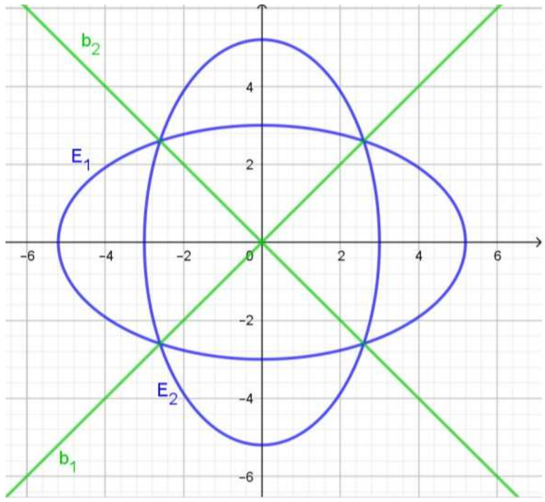
Il numero totale delle quaterne è dunque:

$$8 \cdot C_{6,4} + 3 \cdot C_{8,4} + 6 + \frac{8 \cdot 3}{2} + 12 \cdot 10 + 6 + 12 \cdot C_{6,4} = 120 + 210 + 6 + 12 + 120 + 6 + 180 = 654 .$$

La risposta è **654**.

16. E adesso fuochi d'artificio!

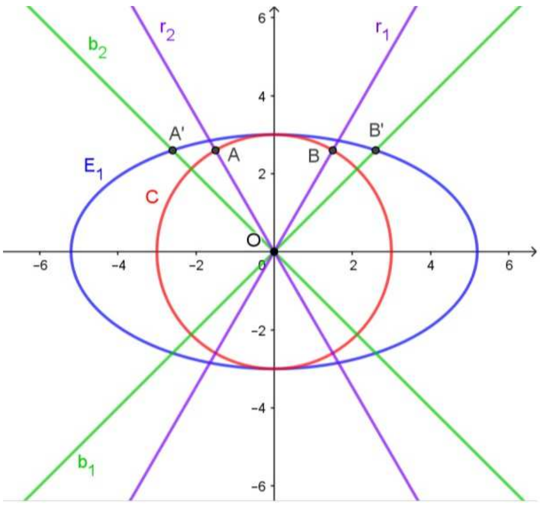
Se mettiamo le due ellissi su un piano cartesiano esse hanno equazioni $E_1 \ \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{9} = 1$ ed $E_2 \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{27} = 1$. Le due ellissi sono simmetriche rispetto alle bisettrici dei quadranti che dividono la regione di piano compresa tra esse in quattro settori di ellisse congruenti. L'area di uno di questi settori si può determinare andando a considerare la dilatazione δ con centro nell'origine O che porta circonferenza C con centro nell'origine e raggio 3 nell'ellisse E_1.



$\delta(C) = E_1$, cioè $x^2 + y^2 = 9 \rightarrow \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{9} = 1$,

allora $\delta : \begin{cases} x' = \sqrt{3}\,x \\ y' = y \end{cases}$, con sostituzione associata $\begin{bmatrix} x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ y \mapsto y \end{bmatrix}$.

Il rapporto tra le aree di figure corrispondenti secondo la dilatazione δ è $A' = \sqrt{3}A$. Per capire quale settore circolare AOB si trasforma mediante δ nel settore di ellisse A'OB' considerato, dobbiamo individuare le rette r_1 e r_2 che mediante δ si trasformano nelle due bisettrici b_1 e b_2. Per far ciò consideriamo la dilatazione inversa e applichiamola a b_1 e b_2.

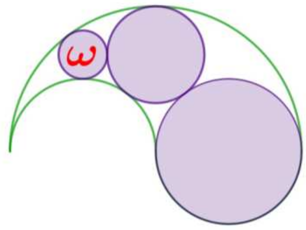


$\delta^{-1}(b_1) = r_1$, $\delta^{-1} : \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ y' = y \end{cases}$, cioè con sostituzione associata $\begin{bmatrix} x \mapsto \sqrt{3}\,x \\ y \mapsto y \end{bmatrix}$, $y = x \rightarrow y = \sqrt{3}\,x$. Analogamente, si ha r_2 di equazione $y = -\sqrt{3}\,x$. L'angolo formato da r_1 e r_2 è $\frac{\pi}{3}$. L'area del settore circolare individuato da r_1 e r_2 su C è $A = \frac{3}{2}\pi$ e quindi $A' = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. Ora possiamo determinare l'area della regione compresa tra E_1 ed E_2:

$A = 4A' = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi = 6 \cdot 1,7321 \cdot 3,1416 = 10,3926 \cdot 3,1416 = 32,64939216$. La risposta è **32**.

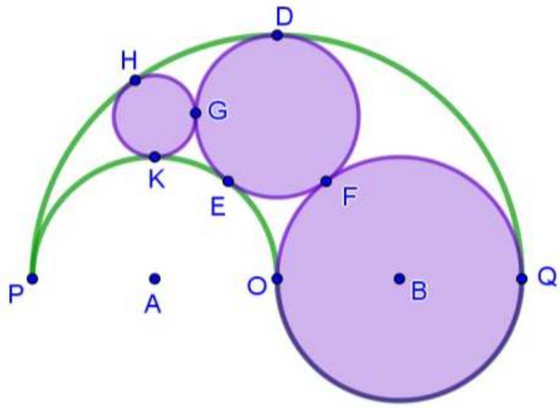
17. Gli ingranaggi dell'orologio

Indichiamo con O il centro della semicirconferenza verde più grande γ di raggio r = 2u (dove u = 8 è il raggio della circonferenza arancione più grande), con A il centro della semicirconferenza verde di sinistra γ_A di raggio pari a u, con B il centro della semicirconferenza verde di sinistra γ_B di raggio pari a u. La circonferenza viola più grande "coincide" con γ_B, . Indichiamo con γ_C la circonferenza viola intermedia e con C il suo centro.



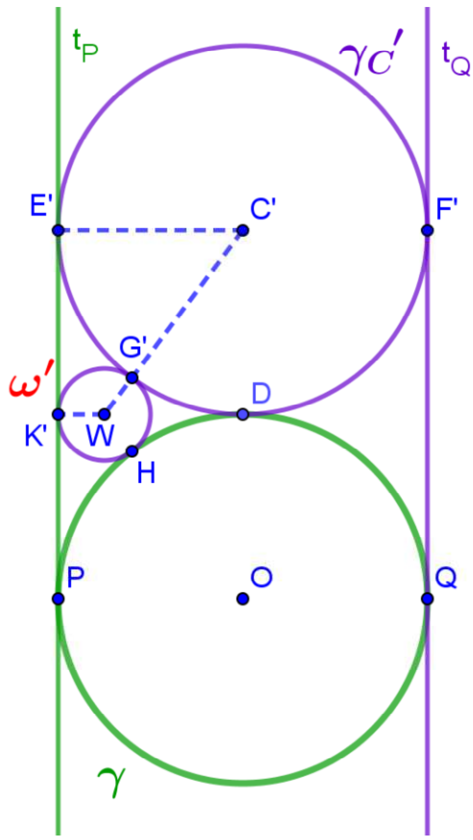
Soluzione (1) Consideriamo l'inversione circolare di centro O e potenza $r^2 = 4u^2$, $I\left(O,4u^2\right)$. Consideriamo i punti di tangenza tra le varie curve:

Q punto di tangenza tra γ_B e γ;
F punto di tangenza tra γ_B e γ_C;
E punto di tangenza tra γ_A e γ_C ;
D punto di tangenza tra γ_C e γ;
G punto di tangenza tra γ_B e ω;
H punto di tangenza tra γ e ω;
K punto di tangenza tra γ_A e ω;
P punto di tangenza tra γ_A e γ.



L'inversione $I\left(O,4\right)$ manda:

- $\gamma \rightarrow \gamma$ (la circonferenza di inversione resta fissa);
- $\gamma_A \rightarrow t_P$ (la circonferenza γ_A passante per il centro di inversione O e tangente in P a γ viene mandata in t_P retta tangente a γ in P);
- $\gamma_B \rightarrow t_Q$ (la circonferenza γ_B passante per il centro di inversione O e tangente in Q a γ viene mandata in t_Q retta tangente a γ in Q);
- $\gamma_C \rightarrow \gamma_C'$ (la circonferenza γ_C tangente in D a γ, in F a γ_B, in E a γ_A viene mandata nella circonferenza γ_C' tangente in D a γ, in F' a t_Q, in E' a t_P);
- $\omega \rightarrow \omega'$ (la circonferenza ω tangente in H a γ, in G a γ_C, in K a γ_A viene mandata nella circonferenza ω' tangente in H a γ, in G' a γ_C' , in K' a t_P).



Consideriamo le figure trasformate e lavoriamo su di esse. Il raggio di γ_C' è $\overline{C'E'} = 2u$, il raggio di ω' è $\overline{WK'} = x$, dove W è il centro di ω'. Considero il trapezio rettangolo C'E'K'W, utilizzando il teorema di Pitagora si può scrivere:

$$\overline{C'W}^2 = \overline{E'K'}^2 + \left(\overline{E'C'} - \overline{WK'}\right)^2 .$$

Sostituendo i vari valori si ha:

$$\left(x+2u\right)^2 = \left(2u\right)^2 + \left(2u-x\right)^2$$

$$2ux = 4u^2 - 2ux \rightarrow x = \frac{1}{2}u .$$

Ora è noto che in una inversione circolare di centro O e potenza k^2 la trasformata di una circonferenza ω di centro C e raggio r è una circonferenza ω' di raggio r' tale che

$$r' = \frac{k^2}{\overline{OC}^2 - r^2} r .$$

Poiché l'inversione circolare è una trasformazione involutoria, noto il raggio di ω' possiamo determinare il raggio di ω cercato.

$$r_\omega = \frac{4u^2}{\overline{OW}^2 - \overline{K'W}^2}\,\overline{K'W} = \frac{4u^2}{\left(\frac{5}{2}u\right)^2 - \left(\frac{1}{2}u\right)^2}\frac{1}{2}u = = \frac{2u^3}{\frac{25}{4}u^2 - \frac{1}{4}u^2} = \frac{2u^3}{6u^2} = \frac{1}{3}u \rightarrow r_\omega = \frac{1}{3}u\,.$$

Allora il raggio della circonferenza ω misura $2,\overline{6}$. La risposta è **2666**.

Soluzione (2) Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con origine in O. La circonferenza γ di centro O e raggio 2u ha equazione $x^2 + y^2 = 4u^2$, la circonferenza γ_B di centro B(u,0) e raggio u ha equazione $x^2 + y^2 - 2ux = 0$, la circonferenza γ_A di centro A(-u,0) e raggio u ha equazione $x^2 + y^2 + 2ux = 0$. Per simmetria la circonferenza γ_C deve avere centro C sull'asse *y*, cioè $C(0,y_C)$. Poiché la circonferenza γ_C è tangente internamente a γ e i centri di entrambe stanno sull'asse y si ha che il raggio di γ_C è $r_C = 2u - y_C$. Inoltre per il teorema di Pitagora si ha che $(r_C + u)^2 = u^2 + y_C^2$. Mettendo a sistema le due relazioni si ricava

$$\begin{cases} y_C = 2u - r_C \\ (r_C + u)^2 = u^2 + y_C^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_C = 2u - r_C \\ r_C^2 + u^2 + 2u\,r_C = u^2 + (2u - r_C)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_C = 2u - r_C \\ 2u\,r_C = -4u\,r_C + 4u^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_C = \frac{4}{3}u \\ r_C = \frac{2}{3}u \end{cases}.$$

Consideriamo ora la circonferenza ω di centro $W(x_W,y_W)$ e raggio r_W. Congiungendo W ai centri delle circonferenze γ, γ_A e γ_C e calcolando le lunghezze di questi tre segmenti si ottengono tre equazioni nelle incognite x_W, y_W e r_W.

$$\overline{OW}^2 = (2u - r_W)^2 \rightarrow (x_W - 0)^2 + (y_W - 0)^2 = (2u - r_W)^2$$
$$\overline{AW}^2 = (u + r_W)^2 \rightarrow (x_W + u)^2 + (y_W - 0)^2 = (r_W + u)^2$$
$$\overline{CW}^2 = \left(\frac{2}{3}u + r_W\right)^2 \rightarrow (x_W - 0)^2 + \left(y_W - \frac{4}{3}u\right)^2 = \left(\frac{2}{3}u + r_W\right)^2$$

Mettendole a sistema si ha:

$$\begin{cases} x_W^2 + y_W^2 = (2u - r_W)^2 \\ x_W^2 + y_W^2 - \frac{8}{3}u\,y_W + \frac{16}{9}u^2 = \left(\frac{2}{3}u + r_W\right)^2 \\ x_W^2 + y_W^2 + 2u\,x_W + u^2 = (r_W + u)^2 \end{cases}.$$

Sottraendo membro a membro alla seconda equazione e alla terza la prima si ottiene:

$$\begin{cases} x_W^2 + y_W^2 = (2u - r_W)^2 \\ -\frac{8}{3}u\,y_W + \frac{16}{9}u^2 = \left(\frac{2}{3}u + r_W\right)^2 - (2u - r_W)^2 \\ 2u\,x_W + u^2 = (r_W + u)^2 - (2u - r_W)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_W^2 + y_W^2 = (2u - r_W)^2 \\ -\frac{8}{3}u\,y_W + \frac{16}{9}u^2 = \frac{4}{9}u^2 + \frac{4}{3}u\,r_W - 4u\,r_W \\ 2u\,x_W = -4u^2 + 6u\,r_W \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_W^2 + y_W^2 = (2u - r_W)^2 \\ -\frac{8}{3}u\,y_W = -\frac{16}{3}u^2 + \frac{16}{3}u\,r_W \\ x_W = -2u + 3r_W \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_W^2 + y_W^2 = (2u - r_W)^2 \\ y_W = 2u - 2r_W \\ x_W = -2u + 3r_W \end{cases}.$$

Sostituendo i risultati ottenuti nella prima equazione si ha:

$$(-2u + 3r_W)^2 + (2u - 2r_W)^2 = (2u - r_W)^2 \rightarrow 4u^2 + 9r_W^2 - 12u\,r_W - 8u\,r_W + 4r_W^2 = -4u\,r_W + r_W^2$$

$$12r_W^2 + 16u\,r_W + 4u^2 = 0 \rightarrow 3r_W^2 + 4u\,r_W + u^2 = 0 \rightarrow r_W = \frac{2u \pm \sqrt{4u^2 - 3u^2}}{3} = \frac{2u \pm u}{3}.$$

Allora le soluzioni sono $r_W = u$ non accettabile e $r_W = \frac{1}{3}u$ accettabile. Sostituendo il valore di u si ricava $r_W = \frac{1}{3} \cdot 8 = 2,\overline{6}$. La risposta è **2666**.

18. L'ora della resa dei conti

Consideriamo la condizione $(1+x) f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Facendo la sostituzione $x \to \frac{1}{x}$ si ottiene:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right) f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{x+1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Se mettiamo a sistema la prima condizione con la seconda ottenuta dalla sostituzione, ponendo per semplicità di calcoli $y = f(x)$ e $z = f\left(\frac{1}{x}\right)$, si può scrivere:

$$\begin{cases} (1+x)y - z = \frac{x^2}{1+x^2} \\ \frac{x+1}{x} z - y = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = (1+x)y - \frac{x^2}{1+x^2} \\ \frac{x+1}{x} z - y = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = (1+x)y - \frac{x^2}{1+x^2} \\ \frac{x+1}{x}\left[(1+x)y - \frac{x^2}{1+x^2}\right] - y = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

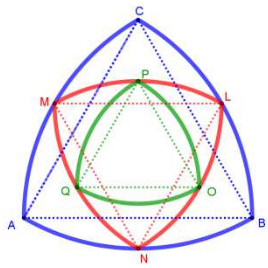
Ricavando y dalla seconda equazione si ha:

$$\frac{(x+1)^2}{x} y - \frac{x(x+1)}{1+x^2} - y = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \left[\frac{(x+1)^2}{x} - 1\right] y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x(x+1)}{1+x^2} \rightarrow \left[\frac{x^2+x+1}{x}\right] y = \frac{x^2+x+1}{1+x^2}.$$

Otteniamo così $y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Ne segue che $f(10) = \frac{10}{1+10^2} = \frac{10}{101}$. La risposta è **111**.

19. Il segreto di Cagliostro

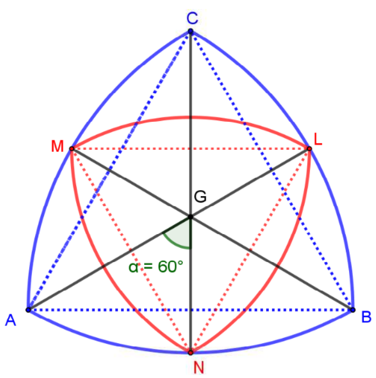
Indichiamo con *a* la misura del lato del triangolo ABC. Dobbiamo determinare la lunghezza dei lati del triangolo equilatero LMN. Sia G il baricentro del triangolo ABC. Il segmento GB è due terzi dell'altezza *h* del triangolo equilatero ABC:



$$\overline{GB} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Ne segue che

$$\overline{GM} = \overline{BM} - \overline{GB} = a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} a.$$



Considerando ora il triangolo LMN si può osservare, in maniera analoga, che $\overline{MG} = \frac{\overline{ML}}{\sqrt{3}}$ e quindi

$$\overline{ML} = \sqrt{3}\,\overline{MG} = (\sqrt{3}-1) a.$$

Da ciò si ottiene che $\overline{PO} = (\sqrt{3}-1)\overline{ML} = (\sqrt{3}-1)^2 a$. Sostituendo il valore di *a* si ha

$\overline{PO} = (\sqrt{3}-1)^2 \cdot 2000 = (0,7321)^2 \cdot 2000 = 0,53597041 \cdot 2000 = 1071,94082$ centimetri. La risposta è **1071**.

20. Arrivederci principessa Clarisse!

Riscriviamo l'espressione analitica della funzione in maniera opportuna:

$$4x^2 + y^2 + 4xy + 80x + 40y + 1400 = 4x^2 + y^2 + 4xy + 80x + 40y + 400 + 1000 = (2x+y+20)^2 + 1000.$$

Allora $f(x,y)=(2x+y+20)^2+1000$ per cui il valore minimo si ottiene quando $2x+y+20=0$. La risposta è **1000**.