LICEO SCIENTIFICO "AMEDEO DI SAVOIA" PISTOIA

2° Premio "Alessandro Rabuzzi"

Gara a squadre di matematica - 11 Febbraio 2016

SOLUZIONI

Curiosiamo innanzitutto tra gli sport olimpici……

1. I 100 metri piani	**0126**
2. La maratona	**0328**
3. I cinque anelli	**0452**
4. Marcia 50 km	**7854**
5. I tuffi	**0008**
6. Tiro con l'arco	**1339**
7. L'arco olimpico	**0742**
8. Il decathlon	**8461**
9. Pugilato	**0014**
10. Guantoni da pugilato	**0267**
11. Canottaggio	**2860**
12. Il beach volley	**0350**
13. Pallacanestro	**0044**

Conosciamo il villaggio olimpico di Rio de Janeiro

14. I giochi d'acqua	**0120**
15. La cerimonia di apertura	**5797**
16. La base della torre di Copacabana	**1531**
17. Il pass degli atleti	**1815**
18. Le colonne della torre di Copacabana	**0016**
19. La nuova copertura del Maracanã	**0320**
20. La sfera luminosa della torre	**0241**

SOLUZIONI

Curiosiamo innanzitutto tra gli sport olimpici……

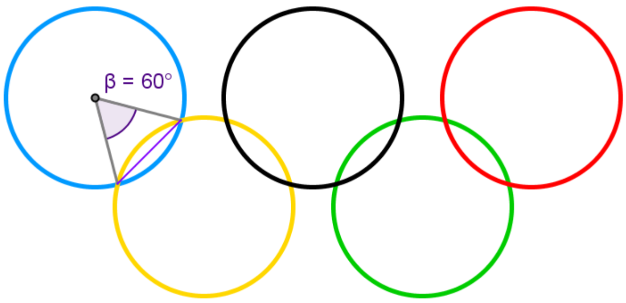
1. I 100 metri piani

Se Bolt conquista l'oro, l'argento e il bronzo possono essere scelti in 7·6 = 42 modi diversi. Le stesse possibili scelte ci sono sia nel caso in cui Bolt arrivi secondo, sia nel caso in cui arrivi terzo. I possibili ordini di arrivo sono 3·42 = 126. La risposta è **126**.

2. La maratona

I tre numeri degli atleti del Kenia possono essere scritti rispettivamente nella forma $a\cdot 100+b\cdot 10+c$, $(a+1)\cdot 100+(b+1)\cdot 10+c+1$, $(a+2)\cdot 100+(b+2)\cdot 10+c+2$. Affinché la loro somma sia ancora un numero a tre cifre e sia il più grande possibile si deve avere: $a+2+a+1+a=9$, cioè $a=2$; da ciò segue che $b=1$ e $c=7$. I tre numeri sono quindi 217, 328 e 439. La risposta è **328**.

3. I cinque anelli



Tracciamo il segmento che unisce i due punti d'intersezione di due cerchi. Esso divide la regione piana di cui vogliamo l'area in due parti uguali. L'area di una di queste parti è data dalla differenza tra l'area di un settore circolare e l'area del triangolo equilatero in esso contenuto.

$$A=2\left(A_s-A_T\right)=2\left(\frac{\pi}{6}r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right)=r^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Svolgendo i calcoli si ha:

$A=5^2 10^2\left(\frac{3,1416}{3}-\frac{1,7321}{2}\right)=5^2 10^2\cdot\left(1,0472-0,86605\right)=2500\cdot 0,18115=452,875\,\text{cm}^2$. La risposta è **452**.

4. Marcia 50 km

La lancetta delle ore (1) compie un giro ogni 12 ore mentre la lancetta dei minuti (2) compie un giro ogni ora ed entrambe si muovono di moto circolare uniforme. Quindi possiamo esprimere le velocità di rotazione delle due lancette in giri/ore nel seguente modo: $w_1 = 1/12$ giri/ore, $w_2 = 1$ giri/ore. Per trovarsi sovrapposte per la seconda volta dopo le 12, la lancetta delle ore deve aver percorso una certa frazione di giro α, mentre la lancetta dei minuti deve aver percorso 2 giri interi più la stessa frazione di giro α. Quindi abbiamo da una parte $\alpha = w_1\cdot t$, e dall'altra $\alpha + 2 = w_2\cdot t$. Combinando le due relazioni e osservando che $w_2 = 12\cdot w_1$ si ricava il tempo t.

$w_1\cdot t+2=12\cdot w_1\cdot t \;\rightarrow\; \frac{t}{12}+2=t \;\rightarrow\; t=\frac{24}{11}$ ore. Quindi $t=\frac{24}{11}\cdot 3600=\frac{86400}{11}=7854,\overline{54}$ secondi. La risposta è **7854**.

5. I tuffi

Portando allo stesso membro i termini con le x e le y otteniamo la seguente equazione $xy - x - y = 5$ che deve essere risolta negli interi. Cerchiamo di rendere scomponibile il membro di sinistra, in modo da poter far intervenire argomenti di divisibilità. Ci si accorge facilmente che aggiungendo 1 da entrambi i lati otteniamo:

$$xy - x - y + 1 = 6 \quad \rightarrow \quad (x-1)(y-1) = 6.$$

Ma 6 si può scrivere come prodotto di due numeri interi nei seguenti modi:

$$6 = 1\cdot 6 = 6\cdot 1 = (-1)\cdot(-6) = (-6)\cdot(-1) = 2\cdot 3 = 3\cdot 2 = (-2)\cdot(-3) = (-3)\cdot(-2).$$

A seconda dei casi, otteniamo le soluzioni (x, y) di seguito elencate:

$$(2, 7); (7, 2); (0, -5); (-5, 0); (3, 4); (4, 3); (-1, -2); (-2, -1).$$

La risposta è **8**.

6. Tiro con l'arco

I cerchi centrali gialli, quello da 10 punti e quello da 9 punti, hanno rispettivamente area $A_{10} = 16\pi$, e $A_9 = 64\pi$. L'area della corona circolare che attribuisce 9 punti è $A'_9 = A_9 - A_{10} = 48\pi$. Ne segue che la probabilità di fare 10 punti colpendo la zona gialla è $p(10/G) = 1/4$, mentre la probabilità di fare 10 punti colpendo la zona gialla è $p(9/G) = 3/4$. Dalle statistiche di gara si sa che la probabilità che ha l'arciere italiano ci colpire la zona gialla è $p(G) = 95\%$. Allora la probabilità che l'arciere italiano faccia 10 punti e la probabilità che faccia 9 punti sono rispettivamente

$$p(10) = p(G)\cdot p(10/G) = \frac{19}{20}\cdot\frac{1}{4} = \frac{19}{80}, \qquad p(9) = p(G)\cdot p(9/G) = \frac{19}{20}\cdot\frac{3}{4} = \frac{57}{80}.$$

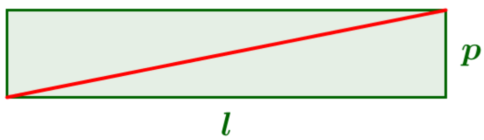
Ora per totalizzare almeno 29 punti su tre frecce deve o colpire tre 10 o colpire due 9 e un 10, quindi la probabilità cercata si ottiene sommando la probabilità di fare 30 e la probabilità di fare 29

$$p = p(30) + p(29) = \left[p(10)\right]^3 + 3\cdot\left[p(10)\right]^2\cdot p(9) = \frac{19^2}{80^2}\left(\frac{19}{80} + 3\cdot\frac{57}{80}\right) = \frac{19^2}{80^3}190 = \frac{19^3}{8^3\cdot 10^2} = \frac{6859}{51200} \cong 0{,}1339648.$$

La risposta è **1339**.

7. L'Arco Olimpico

Sia l la misura della circonferenza di base della vite, L la sua lunghezza e p il passo della filettatura. Se dividiamo la lunghezza per il passo otteniamo il numero di giri n che dobbiamo far fare alla vite per avvitarla completamente, cioè $n = L/p$. Per calcolare la lunghezza totale della filettatura possiamo calcolare la lunghezza del tratto di filettatura che corrisponde a un singolo giro della vite. Tale lunghezza è data dalla misura della diagonale di un rettangolo di base πd e altezza p, come mostrato in figura. $f = \sqrt{l^2 + p^2}$.



Allora la lunghezza totale della filettatura sarà

$$F = n\,f = \frac{L}{p}\sqrt{l^2 + p^2},$$

quindi

$$F = \frac{42}{0,6}\sqrt{16\cdot 7 + 0,36} = 70\sqrt{112,36} = 7\sqrt{11236} = 7\sqrt{2^2\cdot 53^2} = 7\cdot 106 = 742 \text{ mm}.$$

La risposta è **742**.

8. Il decathlon

Scomponiamo la frazione che rappresenta il nostro numero N al variare di n numero naturale.

$$N = \frac{n^3 - 12}{n+2} = \frac{n^3 + 8 - 20}{n+2} = n^2 - 2n + 4 - \frac{20}{n+2}.$$

Affinché N sia un numero intero relativo si deve avere che $n + 2|20$. Ciò accade se n è uguale a 0, 2, 3, 8, 18. Infine va verificato che N sia un numero naturale. Ciò accade solo per 3, 8 e 18. Il prodotto di tali numeri è $3\cdot 8\cdot 18 = 432$ Quindi il punteggio del decatleta nelle prime nove gare è 8893 − 432 = 8461. La risposta è **8461**.

9. Pugilato

Osserviamo prima di tutto che la condizione richiesta può essere scritta nella forma $\left|\sqrt{n} - \sqrt{101}\right| < 1$, ovvero $\sqrt{101} - 1 < \sqrt{n} < \sqrt{101} + 1$. Trattandosi di quantità sicuramente positive, si possono elevare al quadrato entrambi i membri ottenendo $81,\ldots < n < 122,\ldots$. Considerando i valori interi, tale disuguaglianza equivale a $82 \le n \le 122$. Tra di essi devo considerare poi solo i multipli di 3 cioè 84, 87, 90, …, 120, cioè 13 numeri naturali. La risposta è **14**.

10. Guantoni da pugilato

Consideriamo una sfera inscritta in un cubo di spigolo L. Indichiamo con R il raggio di tale sfera ($R = L/2$). La distanza del centro della sfera da un vertice del cubo è $D = R\sqrt{3}$. Questa relazione tra la distanza del centro della sfera dal vertice delle tre facce a cui è tangente deve valere anche per le sfere piccole. Se con r indichiamo il loro raggio allora possiamo scrivere la relazione $d = r\sqrt{3}$, dove d è la distanza del centro della sfera piccola dal vertice. Se la sfera grande e la sfera piccola sono tangenti fra loro la distanza K tra il punto di tangenza delle due sfere e il vertice può essere ricavata sia in funzione di R sia in funzione di r.

$$K = R\sqrt{3} - R = R\left(\sqrt{3}-1\right), \qquad K = r\sqrt{3} + r = r\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Uguagliando le due relazioni troviamo r in funzione di R.

$$r\left(\sqrt{3}+1\right) = R\left(\sqrt{3}-1\right) \quad \rightarrow \quad r = R\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad \rightarrow \quad r = \frac{L}{2}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

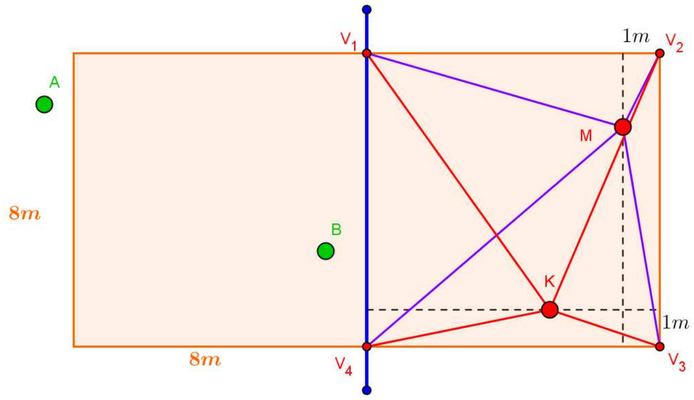
Il diametro delle sfere piccole è quindi $2r = L\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 1000\frac{1,7321-1}{1,7321+1} = 1000\frac{0,7321}{2,7321} \cong 267,9623$ centesimi di millimetro. La risposta è **267**.

11. Canottaggio

Si tratta di contare tutte le possibili parole di 13 lettere che si possono formare con 9 O, 3 A e 1 B. Tale numero è dato da: $N = \frac{13!}{9!\cdot 3!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6} = 26\cdot 110 = 2860$. La risposta è **2860**.

12. Il beach volley

Chiamiamo $Q(x)$ la somma dei quadrati delle distanze delle due giocatrici dai vertici della loro metà campo di tali distanze, cioè $Q(x) = \overline{KV_1}^2 + \overline{KV_2}^2 + \overline{KV_3}^2 + \overline{KV_4}^2 + \overline{MV_1}^2 + \overline{MV_2}^2 + \overline{MV_3}^2 + \overline{MV_4}^2$., dove 0 ≤ x ≤ 7. Calcoliamo adesso i vari addendi.



$\overline{KV_1}^2 = 7^2 + (7-x)^2 = x^2 - 14x + 98$,

$\overline{KV_2}^2 = 7^2 + (x+1)^2 = x^2 + 2x + 50$,

$\overline{KV_3}^2 = 1^2 + (x+1)^2 = x^2 + 2x + 2$,

$\overline{KV_4}^2 = 1^2 + (7-x)^2 = x^2 - 14x + 50$,

$\overline{MV_1}^2 = 7^2 + x^2 = x^2 + 49$,

$\overline{MV_2}^2 = 1^2 + x^2 = x^2 + 1$,

$\overline{MV_3}^2 = 1^2 + (8-x)^2 = x^2 - 16x + 65$,

$\overline{MV_4}^2 = 7^2 + (8-x)^2 = x^2 - 16x + 113$.

Allora $Q(x) = 8x^2 - 56x + 428$ è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e quindi l'ordinata del suo vertice rappresenta il minimo della quantità cercata. La distanza x da determinare è l'ascissa del vertice cioè $x = \frac{56}{16} = \frac{7}{2} = 3,5$ metri. La risposta è **350**.

13. La pallacanestro

Prima di tutto raccogliamo una x e scriviamo $p(x) = x\left(2x^4 + 10x^3 - 19x^2 + 29x - 22\right)$. Quindi $x_1 = 0$ è una delle radici di $p(x)$. Si verifica facilmente che $p(1) = 0$, anche $x_2 = 1$ è una delle radici di $p(x)$. Allora si ha

$$p(x) = \left(2x^3 + 12x^2 - 7x + 22\right) = 2x(x-1)\left(x^3 + 6x^2 - \frac{7}{2}x + 11\right).$$

Ora le tre radici mancanti di , sono le radici del polinomio monico di terzo grado

$$q(x) = x^3 + 6x^2 - \frac{7}{2}x + 11.$$

Si sa che $x_3 + x_4 + x_5 = -6$, e che $x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = -\frac{7}{2}$.

Ora si ha che la somma dei quadrati delle radici di $q(x)$ è

$$x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = (x_3 + x_4 + x_5)^2 - 2(x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5).$$

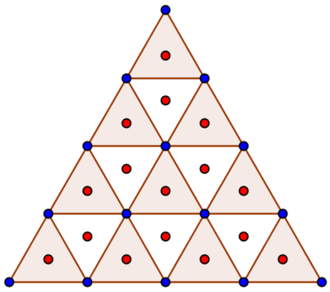
Allora somma dei quadrati delle radici di $p(x)$ vale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1 + (-6)^2 - 2\left(-\frac{7}{2}\right) = 1 + 36 + 7 = 44.$$

La risposta è **44**.

Conosciamo il villaggio olimpico di Rio de Janeiro

14. Giochi d'acqua



Per capire come contare tutti i giochi d'acqua dividiamo i lati del nostro triangolo equilatero in 4 parti uguali. I triangoli piccoli sono 16 quindi nei loro centri rossi possiamo disporre 16 spruzzi alti 5 metri. Come si può osservare bene dalla figura, i vertici blu sono dati dalla somma di tutti i numeri naturali da 1 a 5 e quindi gli spruzzi alti 2,5 metri sono 15. Generalizzando, se dividiamo i lati del nostro triangolo equilatero in n parti, otteniamo un triangoli piccoli pari a

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1=n^2,$$

e un numero di vertici pari a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

In totale i giochi d'acqua che possiamo così posizionare sono

$$N=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+n^2=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1+n^2=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1.$$

Per determinare n quindi dobbiamo risolvere la seguente equazione di secondo grado.

$$21781=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+21780=0$$

$$n=\frac{-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+6\cdot 21780}}{3}=\frac{-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{522729}}{3}=\frac{-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{241^2\cdot 3^2}}{3}=\frac{-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}723}{3}.$$

Poiché n deve essere un numero naturale l'unica soluzione accettabile è quindi

$$n=\frac{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}723}{3}=\frac{720}{6}=120.$$

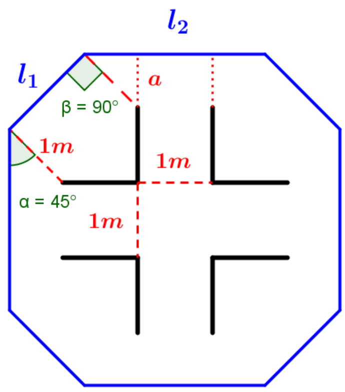
La risposta é **120**.

15. La cerimonia di apertura

2	1	8	7	5	9	3	6	4
4	7	9	1	3	6	5	8	2
6	**5**	3	2	8	4	1	9	7
9	4	5	3	**7**	2	8	1	6
3	8	6	5	4	1	2	7	9
1	2	7	6	9	8	4	5	3
5	3	4	8	6	7	9	2	1
7	**9**	2	4	1	5	6	3	8
8	6	1	9	2	3	**7**	4	5

La risposta è **5797**.

16. La base della torre luminosa



Si tratta di un ottagono con i lati opposti congruenti. Il lato l_1 misura $\sqrt{2}$ metri, mentre il lato misura $2a+1$ metri, dove a è lungo $1/\sqrt{2}$ metri. Allora il perimetro della base è uguale a

$$2p=4(l_1+l_2)=4\left(\sqrt{2}+2\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)=4\left(2\sqrt{2}+1\right)=4\cdot 3{,}8284=15{,}3136\text{ m}.$$

Il risultato deve essere poi portato in centimetri. La risposta è **1531**.

17. Il pass degli atleti

Si può procedere per elencazione. Da una cifra e da due cifre non ci sono numeri palindromi che rispettano la richiesta del problema. Da tre cifre abbiamo 161 e 323 (242 e 404 sono pari). Da quattro cifre abbiamo solo 1331. La somma di tali numeri è 161 + 323 + 1331 = 1815. La risposta è **1815**.

18. Le colonne della torre di Copacabana

Siano h_1, h_2, … , h_{n+1} le altezze in progressione geometrica di ragione 2. Ora h_3 è la distanza tra la seconda e la terza sbarra ed è il terzo termine della progressione geometrica $h_3 = h_1 2^2$, ed è $h_3 = 1$; quindi si ha $h_1 = 0,25$ metri. Conoscendo l'altezza della colonna $h_{TOT} = 31,75$ metri, e sapendo che

$h_{TOT} = \sum_{i=1}^{n+1} h_i = h_1 \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ si ha $31,75 = 0,25\left(2^{n+1}-1\right) \rightarrow 127 = 2^{n+1} - 1 \rightarrow 2^{n+1} = 2^7 \rightarrow n+1 = 7$.

Allora $h_7 = 0,25 \cdot 2^6 = 16$. La risposta è **16**.

19. La nuova copertura del Maracanã

L'angolo al centro associato a un lato è la duemilasedicesima parte dell'angolo giro, e quindi l'angolo alla circonferenza che sottende il lato è la duemilasedicesima parte dell'angolo piatto. Allora la misura del diametro D, ricordando che per angoli piccoli $\sin \vartheta \cong \vartheta$ è data da

$$D = \frac{L}{\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)} \cong \frac{2016 \cdot L}{\pi} .$$

Quindi la lunghezza cercata è

$$D = \frac{2016 \cdot 0,5}{\pi} = \frac{1008}{3,1416} = 320,85561497 \text{ metri.}$$

La risposta è **320**.

20. La sfera luminosa della torre di Copacabana

Dobbiamo determinare l'altezza delle piramidi a base quadrata che sono state costruite sulle facce del cubo. Le facce laterali di tali piramidi sono triangoli equilateri di lato s = 1 m. Le altezze di tali facce misurano

$$h_f = \frac{\sqrt{3}}{2} s .$$

L'altezza della piramide si ottiene utilizzando il teorema di Pitagora come altezza di un triangolo isoscele i cui lati misurano h_f e la cui base misura s. Allora

$$h = \sqrt{h_f^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{2} .$$

Il diametro della sfera cercato è dato dalla somma dello spigolo del cubo e di due altezze delle piramidi cioè

$$d = s + 2 \cdot h = s + s\sqrt{2} = s\left(1+\sqrt{2}\right) = 100 \cdot 2,4142 = 241,42 \text{ cm.}$$

La risposta è **241**.