LICEO SCIENTIFICO "AMEDEO DI SAVOIA" PISTOIA

1° Premio "Alessandro Rabuzzi"

Gara a squadre di matematica

26 Febbraio 2015

SOLUZIONI

1. Quadrati nei quadrati	**2250**
2. Insufficienze a fine anno	**0025**
3. Fetta di torta	**0033**
4. Giochi enigmistici	**0171**
5. Solidi platonici	**0143**
6. Divisori primi	**2113**
7. Somme fattoriali	**0001**
8. Radici di polinomi	**5444**
9. Differenza di cubi	**0277**
10. L'autostrada	**0108**
11. La password	**2745**
12. Cinque cerchi	**0207**

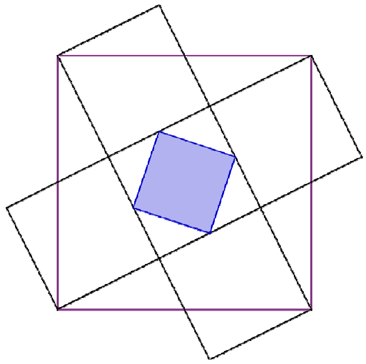
Il logo del liceo

13. Diagonali	**0060**
14. Il percorso più breve	**3055**
15. I dadi	**0301**

16. La macchina di Wimshurst	**0445**
17. Satelliti	**1933**
18. Numeri primi	**5323**

SOLUZIONI

1. Quadrati nei quadrati



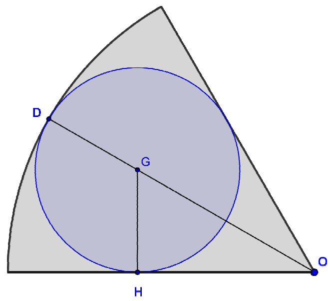
Consideriamo i quattro triangoli rettangoli presenti nella figura che hanno un vertice nel punto medio del rispettivo lato del quadrato grande. Disegniamo di ognuno il simmetrico rispetto al vertice considerato. Adesso si osserva facilmente che l'area del quadrato intermedio si può ottenere dall'area di quello grande dividendola per 5. A sua volta l'area del quadrato piccolo è equivalente a metà dell'area del quadrato intermedio. La risposta è quindi:

$$A=\frac{150^2}{10}=2250.$$

2. Insufficienze a fine anno

Sia L l'evento "insufficienza a Latino" e sia M l'evento "insufficienza a Matematica". Si sa che $p(L)=30\%$, $p(M)=15\%$, $p(L\cap M)=10\%$. Allora $p\left[(L-M)\cup(M-L)\right]=20\%+5\%=25\%$. La risposta è quindi 25.

3. Fetta di torta



La circonferenza che delimita la panna è inscritta nel settore circolare di ampiezza 60°. Sia $\overline{OD}=R$ e $\overline{GD}=r$. Il triangolo OGH è un triangolo rettangolo con gli angoli di 30° e di 60°. Allora $2\overline{GH}=\overline{OG}$, da cui segue immediatamente $2r=R-r$, cioè $R=3r$. La percentuale richiesta è:

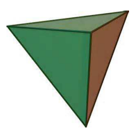
$$P=\left(1-\frac{A_{cerchio}}{A_{settore}}\right)\cdot 100=\left(1-\frac{\pi r^2}{\frac{\pi}{6}R^2}\right)\cdot 100=\left(1-\frac{6r^2}{R^2}\right)\cdot 100=$$

$$=\left(1-\frac{6r^2}{9r^2}\right)\cdot 100=\frac{1}{3}\cdot 100\cong 33,3\%.$$ La risposta è 33.

4. Giochi enigmistici

La prima cosa che si osserva è che il numero centrale è 19. La seconda è che non c'è bisogno di risolvere tutto il gioco inserendo tutti i numeri perché la loro somma deve essere necessariamente 19·9 = 171.

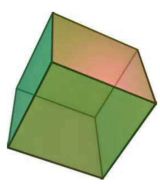
5. Solidi platonici

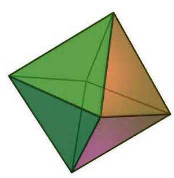


Il tetraedro (4 Facce, 4 Vertici, 6 Spigoli) non ha nessuna diagonale interna, come si può osservare bene dalla figura. Allora $d_T=0$.

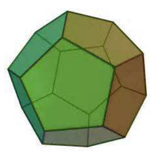
Il cubo (6 F, 8 V, 12 S) ha diagonali interne. Per calcolare il numero di tutte le diagonali basta considerare tutti i segmenti che si possono formare con gli 8 vertici e dal loro numero togliere gli spigoli. Per trovare infine le diagonali interne dobbiamo togliere le diagonali delle facce, che per il cubo sono 2 per ogni faccia (un quadrato ha due diagonali).

$$d_C=\binom{V}{2}-S-2\cdot F=\binom{8}{2}-12-12=\frac{8\cdot 7}{2}-24=4$$





L'ottaedro (8 F, 6 V, 12 S) ha esattamente 3 diagonali interne. Allora $d_O=3$.

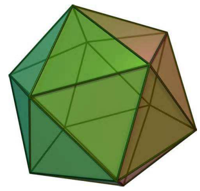


Il dodecaedro (12 F, 20 V, 30 S) ha diagonali interne. Per calcolare il numero di diagonali interne si può usare lo stesso ragionamento fatto per il cubo. Questa volta le diagonali di una faccia pentagonale sono 5.

$$d_D = \binom{V}{2} - S - 5 \cdot F = \binom{20}{2} - 30 - 60 = \frac{20 \cdot 19}{2} - 90 = 100 .$$

L'icosaedro (20 F, 12 V, 30 S) ha diagonali interne. Per calcolare il numero di diagonali interne si può usare lo stesso ragionamento fatto per il cubo. Questa volta non ci sono diagonali sulle facce.

$$d_I = \binom{V}{2} - S = \binom{12}{2} - 30 = \frac{12 \cdot 11}{2} - 30 = 36 .$$



La risposta è quindi $d = d_T + d_C + d_O + d_D + d_I = 0 + 4 + 3 + 100 + 36 = 143$.

6. Divisori primi

Il numero $2^{22} + 1$ può essere riscritto nel seguente modo:

$$2^{22} + 1 = 2^{22} + 2 \cdot 2^{11} + 1 - 2 \cdot 2^{11} = \left(2^{11} + 1\right)^2 - 2^{12} = \left(2^{11} + 1 - 2^6\right)\left(2^{11} + 1 + 2^6\right) =$$
$$= \left(2048 + 1 - 64\right)\left(2048 + 1 + 64\right) = 1985 \cdot 2113 = 5 \cdot 397 \cdot 2113 .$$

La risposta è quindi 2113.

7. Somme fattoriali

Si tratta di calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

Osserviamo che $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Quindi $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \dfrac{4}{5!} + ... = \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} + ... = 1$

8. Radici di polinomi

Dividiamo per 3 il polinomio $p(x)$ in modo da trovare un polinomio monico $q(x) = x^4 + \dfrac{7}{3}x^3 - 3$ che abbia le stesse radici x_1, x_2, x_3 e x_4. Sappiamo che:

(1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{7}{3}$,

(2) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$.

Allora utilizzando la relazione (1) si può scrivere:

$$\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)^2 = \frac{49}{9} .$$

Sviluppiamo ora il quadrato del quadrinomio, ed utilizziamo la relazione (2):

$$\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + +2x_2x_4 + 2x_3x_4 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 .$$

Quindi si ha $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \dfrac{49}{9} = 5,\overline{4}$. La risposta è quindi 5444.

9. Differenza di cubi

Chiamando x e y i due numeri e z il valore cercato, il testo del problema si traduce in:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x - y = 5 \\ x^3 - y^3 = 2015 \end{cases}$$

Fattorizziamo l'ultima relazione:

$$\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=2015 \rightarrow 5\left(x^2+xy+y^2\right)=2015 \rightarrow \left(x^2+xy+y^2\right)=403 \ (*).$$

Utilizzando la prima relazione, l'espressione (*) può essere riscritta nella forma $z=403-xy$. Utilizzando ora il quadrato del binomio $x-y$, possiamo riscrivere l'espressione (*) anche nel seguente modo:

$$\left(x-y\right)^2+3xy=403 \rightarrow 3xy=403-25 \rightarrow xy=126.$$

A questo punto si ha $z=403-126=277$.

10. L'autostrada

Siano v_1 e v_2 le due velocità e v la velocità media dell'intero percorso. Siano t_1 e t_2 rispettivamente i tempi che l'auto impiega a percorrere i due tratti di strada, allora si ha $t_1 + t_2 = t$, dove t è il tempo totale. Se d è la distanza dell'intero tragitto si ha:

$$v=\frac{d}{t},\ t_1=\frac{d_1}{v_1}=\frac{2d}{3v_1},\ t_2=\frac{d_2}{v_2}=\frac{d}{3v_2} \quad \rightarrow \quad t=\frac{2d}{3v_1}+\frac{d}{3v_2}=\frac{d}{3}\left(\frac{2}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)$$

$$v=\frac{d}{t}=\frac{d}{\frac{d}{3}\left(\frac{2}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)}=\frac{1}{\frac{2}{3}\frac{1}{v_1}+\frac{1}{3}\frac{1}{v_2}}$$

La velocità media è quindi la media armonica ponderata delle velocità. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$v=\frac{1}{\frac{2}{3}\frac{1}{120}+\frac{1}{3}\frac{1}{90}}=\frac{1}{\frac{6+4}{1080}}=108\,km/h.$$

11. La password

Definiamo il polinomio $q\left(x\right)=p\left(x\right)-x$. Dalle informazioni dell'agenda segue che:

$$q\left(0\right)=p\left(0\right)-0=0$$

$$q\left(1\right)=p\left(1\right)-1=0$$

$$q\left(2\right)=p\left(2\right)-2=0.$$

Quindi 0, 1 e 2 sono radici di $q\left(x\right)$ che deve essere a coefficienti interi e monico (affinché $p\left(15\right)$ sia minimo). Per il teorema di Ruffini, possiamo scrivere $q\left(x\right)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$ da cui segue $p\left(x\right)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)+x$. Adesso possiamo calcolare $p\left(15\right)=15\cdot 14\cdot 13=2745$.

12. Cinque cerchi

Basta osservare che $2r=d-l$, dove r è il raggio del cerchio piccolo, d è la diagonale del quadrato ed l è il lato del quadrato.

$$r=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot l}{2} \rightarrow r=\frac{\left(1,4142-1\right)\cdot 1}{2}=0.4142\cdot 0,5=0,2071m\cong 207\,mm.$$

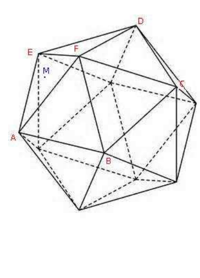
13. Diagonali

Il dodecaedro ha 12 facce pentagonali. Ogni pentagono ha un numero di diagonali pari a al numero delle possibili coppie di vertici meno il numero dei lati:

$$d_P=\binom{5}{2}-5=5 \rightarrow d=12\cdot 5=60.$$

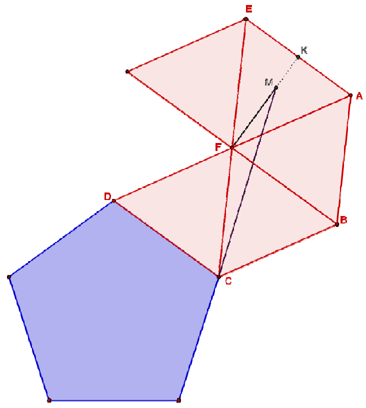
14. Il percorso più breve

Considera lo sviluppo piano della superficie della piramide a base pentagonale ABCDEF. Il percorso più breve per andare da C vertice di base a M centro della faccia laterale opposta è il segmento CM. Consideriamo il triangolo CMF: $\overline{CF}=s=20\,cm$,



$A\hat{F}M = \alpha = 60° + 60° + 30° = 150°$. M baricentro del triangolo AFE divide la mediana FK in due parti una doppia dell'altra, per cui si ha che

$$\overline{FK} = \frac{\sqrt{3}}{2}s \;\rightarrow\; \overline{FM} = \frac{2}{3}\overline{FK} = \frac{\sqrt{3}}{3}s.$$



Per determinare la lunghezza di CM possiamo applicare il teorema di Carnot al triangolo CMF, ottenendo così

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{CF}^2 + \overline{FM}^2 - 2\cdot\overline{CF}\cdot\overline{FM}\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{s^2 + \frac{1}{3}s^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}s^2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{4}{3}s^2 + s^2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}s.$$

Sostituendo il valore di s si ha

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot 2 = \frac{2,6458}{1,7321}\cdot 2 = 3,05502\,m \cong 3055\,mm.$$

15. I dadi

Si devono determinare le possibili terne di numeri x_1, x_2, x_3, con $1 \le x_i \le 12$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 = 14$. Poiché come risultato minimo possiamo ottenere 3, allora il problema è equivalente a trovare tre numeri n_1, n_2, n_3, anche nulli, tali che $n_1 + n_2 + n_3 = 11$. Il numero di tali terne è dato dalle combinazioni con ripetizione $C'_{3,11} = \binom{13}{11} = \frac{13\cdot 12}{2} = 78$.

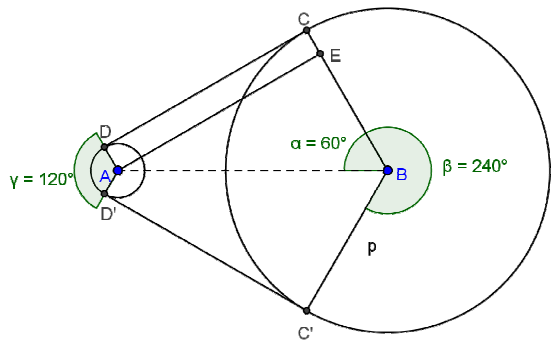
Il numero dei casi possibili è dato invece dalle disposizioni con ripetizione $D'_{12,3} = 12^3 = 1728$.

Allora $p(14) = \frac{78}{1728} = \frac{39}{864} = \frac{13}{288}$, quindi la risposta è 288 + 13 =301.

16. La macchina di Wimshurst

Indichiamo con C e D i punti in cui la parte superiore della cinghia è tangente alle due circonferenze. Dal centro A della prima circonferenza tracciamo tracciamo la parallela al segmento DC fino ad incontrare in E il raggio BC della seconda circonferenza. Osservando la figura si nota che:

$$\overline{EB} = \overline{BC} - \overline{CE} = 60 - 10 = 50\,mm.$$



Allora il triangolo rettangolo ABE è metà di un triangolo equilatero ($\overline{AB} = 100\,mm$, $\overline{BE} = 50\,mm$), per cui si ha $\overline{CD} = 50\sqrt{3}\,mm$.

La cinghia è quindi composta da due segmenti identici che valgono complessivamente $100\sqrt{3}$ e da due archi di circonferenza: il primo che è un terzo della circonferenza piccola, il secondo che è due terzi della circonferenza grande. Allora la lunghezza della cinghia è:

$$L = \frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 10 + \frac{2}{3}\cdot 2\pi\cdot 60 + 100\sqrt{3} = \frac{20\pi\cdot 13}{3} + 100\sqrt{3} =$$

$$= \frac{260}{3}3,1416 + 173,21 = 272,272 + 173,21 \cong 445\,mm.$$

17. Satelliti

Ad ogni giro del primo satellite, il secondo resta indietro di 25 *minuti*. Ci vorranno quindi 255 *min* / 25 *min* = 10,2 giri affinché i due satelliti siano di nuovo alla minima distanza. Questo vuol dire che la massima distanza si avrà dopo 5,1 giri del primo satellite, cioè dopo 230 *min* · 5,1 giri = 1173 *min*, corrispondenti a 19 *ore* e 33 *minuti*. La risposta è quindi 1933.

18. Numeri primi

Gli unici numeri primi di una cifra che possiamo usare sono 2,3,5 e 7. Le coppie formate da queste cifre che a loro volta sono numeri primi possono essere solo 23, 37, 53 e 73. Osserviamo che le coppie trovate non possono ripetersi in un numero di 4 cifre, in quanto lo renderebbero divisibile per la coppia stessa (ABAB è divisibile per AB e per 101): restano da verificare 4·3=12 possibilità:

2337 → divisibile per 3
2353 → divisibile per 13
2373 → divisibile per 3
3723 → divisibile per 3

3753 → divisibile per 3
3773 → divisibile per 11
5323 → **PRIMO**
5337 → divisibile per 3

5373 → divisibile per 3
7323 → divisibile per 3
7337 → divisibile per 11
7353 → divisibile per 3

La risposta è quindi 5323.